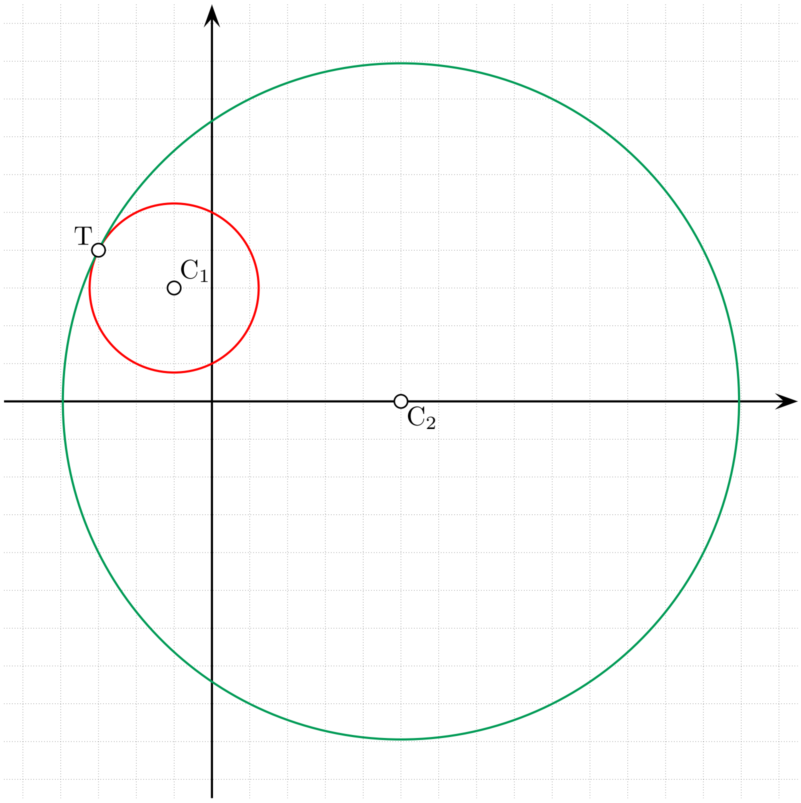
5.8 1)



Calcul du centre et du rayon du 1^er cercle

$x^2 + y^2 + 2\,x - 6\,y + 5 = 0$

$\underbrace{x^2 + 2\,x + 1}_{(x+1)^2} - 1 + \underbrace{y^2 - 6\,y + 9}_{(y-3)^2} - 9 + 5 = 0$

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1 + 9 - 5 = 5 = (\sqrt{5})^2$

$\boxed{\mathrm{C}_1(-1\,;3)}$ et $\boxed{r_1 = \sqrt{5}}$

Calcul du centre et du rayon du 2^nd cercle

$x^2 + y^2 - 10\,x - 55 = 0$

$\underbrace{x^2 - 10\,x + 25}_{(x-5)^2} - 25 + y^2 - 55 = 0$

$(x-5)^2 + y^2 = 25 + 55 = 80 = (4\,\sqrt{5})^2$

$\boxed{\mathrm{C}_2(5\,;0)}$ et $\boxed{r_2 = 4\,\sqrt{5}}$

Position relative des deux cercles

$$\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|$$
$$= |3|\,\sqrt{2^2 + (-1)^2} = 3\,\sqrt{5} = 4\,\sqrt{5} - \sqrt{5} = r_2 - r_1$$

On conclut que le premier cercle est tangent intérieurement au second.

Calcul du point de tangence

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \ \ 2\,x - 6\,y + \ \ 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10\,x \qquad\quad - 55 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient :
$12\,x - 6\,y + 60 = 0$ ou plus simplement $2\,x - y + 10 = 0$.

On en tire $y = 2\,x + 10$ que l'on remplace, par exemple, dans l'équation du second cercle :

$x^2 + (2\,x + 10)^2 - 10\,x - 55 = 0$

$x^2 + 4\,x^2 + 40\,x + 100 - 10\,x - 55 = 0$

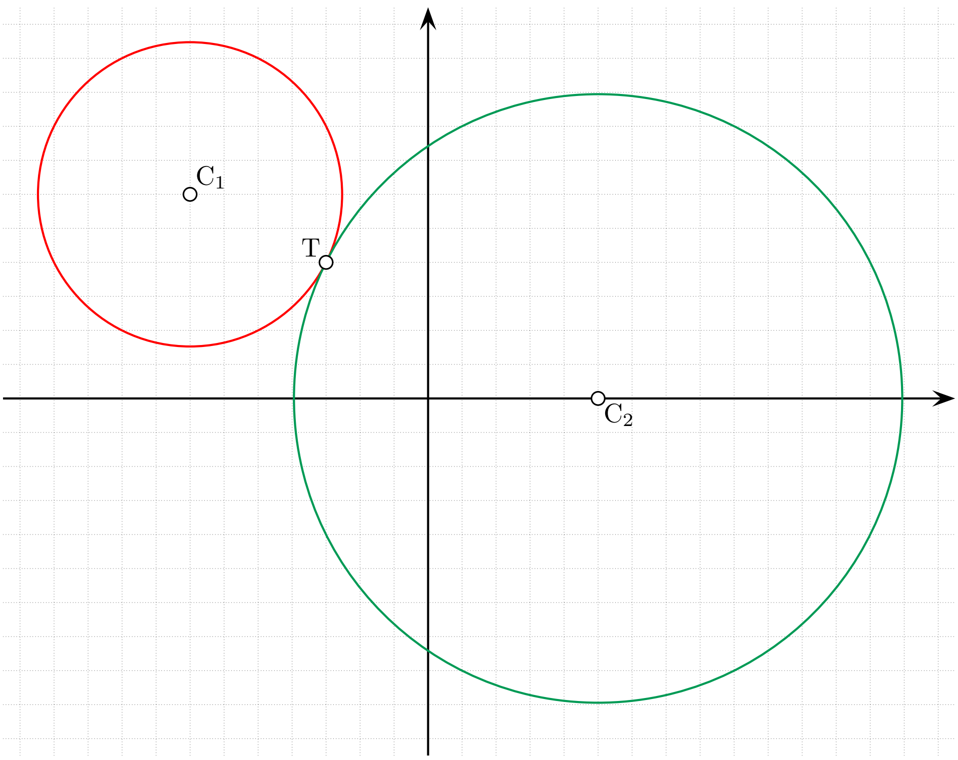
$5\,x^2 + 30\,x + 45 = 0$

$x^2 + 6\,x + 9 = 0$

$(x + 3)^2 = 0$

Par conséquent, $x = -3$ et $y = 2 \cdot (-3) + 10 = 4$.

Le point de tangence est ainsi $\boxed{\mathrm{T}(-3\,;4)}$.

2) 

Calcul du centre et du rayon du 1^er cercle

$x^2 + y^2 + 14\,x - 12\,y + 65 = 0$

$\underbrace{x^2 + 14\,x + 49}_{(x+7)^2} - 49 + \underbrace{y^2 - 12\,y + 36}_{(y-6)^2} - 36 + 65 = 0$

$(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = 49 + 36 - 65 = 20 = (2\,\sqrt{5})^2$

$\boxed{\mathrm{C}_1(-7\,;6)}$ et $\boxed{r_1 = 2\,\sqrt{5}}$

Calcul du centre et du rayon du 2nd cercle

$x^2 + y^2 - 10\,x - 55 = 0$

$\underbrace{x^2 - 10\,x + 25}_{(x-5)^2} - 25 + y^2 - 55 = 0$

$(x-5)^2 + y^2 = 25 + 55 = 80 = (4\sqrt{5})^2$

$\boxed{\mathrm{C}_2(5\,;0)}$ et $\boxed{r_2 = 4\sqrt{5}}$

Position relative des deux cercles

$$\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} 5-(-7) \\ 0-6 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = \left\|6\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|$$
$$= |6|\sqrt{2^2+(-1)^2} = 6\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = r_1 + r_2$$

On conclut que le premier cercle est tangent extérieurement au second.

Calcul du point de tangence

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 14\,x - 12\,y + 65 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10\,x - 55 = 0 \end{cases}$$

La soustraction de ces deux équations délivre $24\,x - 12\,y + 120 = 0$ ou plus simplement $2\,x - y + 10 = 0$.

On en déduit $y = 2\,x + 10$ que l'on substitue dans l'équation du second cercle.

$x^2 + (2\,x + 10)^2 - 10\,x - 55 = 0$

$x^2 + 4\,x^2 + 40\,x + 100 - 10\,x - 55 = 0$

$5\,x^2 + 30\,x + 45 = 0$

$x^2 + 6\,x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

Il en suit $x = -3$ et $y = 2\cdot(-3) + 10 = 4$.

En conclusion, le point de tangence est $\boxed{\mathrm{T}(-3\,;4)}$.