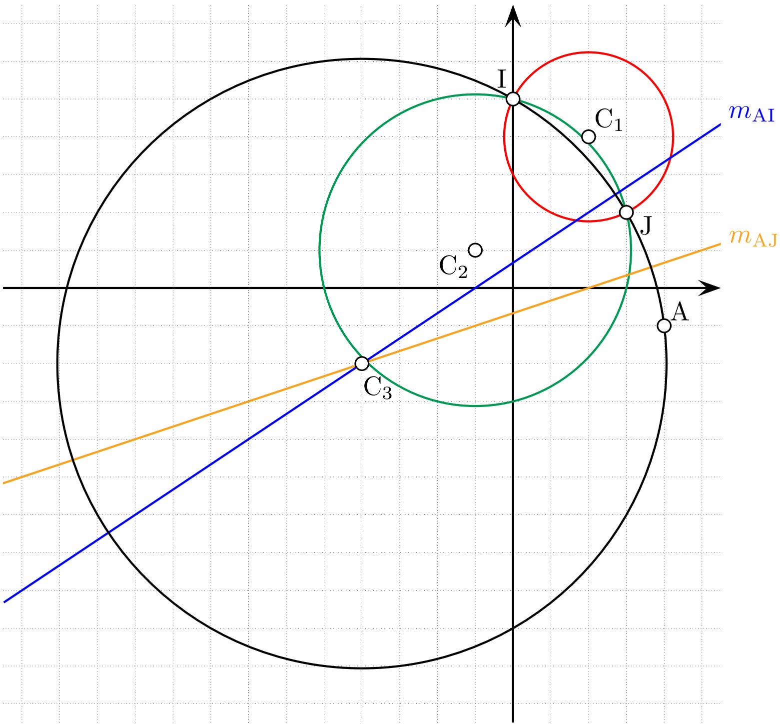
5.9



Calcul du centre et du rayon du cercle Γ_1

$x^2 + y^2 - 4\,x - 8\,y + 15 = 0$

$\underbrace{x^2 - 4\,x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + \underbrace{y^2 - 8\,y + 16}_{(y-4)^2} - 16 + 15 = 0$

$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 + 16 - 15 = 5 = (\sqrt{5})^2$

$\boxed{\mathrm{C}_1(2\,;4)}$ et $\boxed{r_1 = \sqrt{5}}$

Calcul du centre et du rayon du cercle Γ_2

$x^2 + y^2 + 2\,x - 2\,y - 15 = 0$

$\underbrace{x^2 + 2\,x + 1}_{(x+1)^2} - 1 + \underbrace{y^2 - 2\,y + 1}_{(y-1)^2} - 1 - 15 = 0$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1 + 1 + 15 = 17 = (\sqrt{17})^2$

$\boxed{\mathrm{C}_2(-1\,;1)}$ et $\boxed{r_2 = \sqrt{17}}$

Position relative des cercles Γ_1 et Γ_2

$$\delta(\mathrm{C}_1\,;\mathrm{C}_2) = \|\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-4 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \left\|-3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|$$
$$= |-3|\,\sqrt{1^2+1^2} = 3\,\sqrt{2}$$

On constate que $1,89 \approx \sqrt{17} - \sqrt{5} < 3\,\sqrt{2} \approx 4,24 < \sqrt{17} + \sqrt{5} \approx 6,36$ si bien que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent.

Calcul des points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4\,x - 8\,y + 15 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2\,x - 2\,y - 15 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on obtient :

$6\,x + 6\,y - 30 = 0$, c'est-à-dire $x + y - 5 = 0$.

On en déduit $y = -x + 5$ que l'on substitue dans l'équation de l'un des cercles, par exemple le second.

$x^2 + (-x+5)^2 + 2\,x - 2\,(-x+5) - 15 = 0$

$x^2 + x^2 - 10\,x + 25 + 2\,x + 2\,x - 10 - 15 = 0$

$2\,x^2 - 6\,x = 2\,x\,(x-3) = 0$

Il y a ainsi deux solutions :

1) $x_1 = 0$ implique $y_1 = -x_1 + 5 = -0 + 5 = 5$.
   Le premier point d'intersection est $\boxed{\mathrm{I}(0\,;5)}$.
2) $x_2 = 3$ donne $y_2 = -x_2 + 5 = -3 + 5 = 2$.
   Le second point d'intersection est $\boxed{\mathrm{J}(3\,;2)}$.

Calcul de la médiatrice des points A et I

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la médiatrice m_{AI} est de la forme $(m_{\mathrm{AI}}) : -2\,x + 3\,y + c = 0$.

Par ailleurs, elle doit passer par le point $\mathrm{M_{AI}}(\frac{4+0}{2}\,;\frac{-1+5}{2}) = \mathrm{M_{AI}}(2\,;2)$:

$-2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + c = 0$ implique $c = -2$.

L'équation de la médiatrice m_{AI} est donc $\boxed{(m_{\mathrm{AI}}) : -2\,x + 3\,y - 2 = 0}$.

Calcul de la médiatrice des points A et J

Vu que $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, la médiatrice m_{AJ} est de la forme $(m_{\mathrm{AJ}}) : -x + 3\,y + c = 0$

En outre, on sait qu'elle passe par le point $\mathrm{M_{AJ}}(\frac{4+3}{2}\,;\frac{-1+2}{2}) = \mathrm{M_{AJ}}(\frac{7}{2}\,;\frac{1}{2})$:

$-\frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + c = 0$ mène à $c = 2$.

Ainsi l'équation de la médiatrice m_{AJ} est $\boxed{(m_{\mathrm{AJ}}) : -x + 3\,y + 2 = 0}$.

Calcul du centre $\mathrm{C_3}$ du cercle passant par les points A, I et J

$$\begin{cases} -2\,x + 3\,y - 2 = 0 \\ -x + 3\,y + 2 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la seconde, on obtient $x + 4 = 0$, de sorte que $x = -4$. En remplaçant cette valeur de x dans la seconde équation, il suit $-(-4) + 3\,y + 2 = 0$, si bien que $y = -2$. On conclut à $\boxed{\mathrm{C_3}(-4\,;-2)}$.

Équation du cercle passant par les points A, I **et** J

Étant donné que ce cercle a pour centre $C_3(-4\,;-2)$, son équation est de la forme $(x+4)^2+(y+2)^2=r^2$.

Comme ce cercle passe par le point $A(4\,;-1)$, on obtient :
$(4+4)^2+(-1+2)^2=65=r^2$.

Finalement, l'équation du cercle passant par les points A, I et J est :
$\boxed{(x+4)^2+(y+2)^2=65}$.