5 Nombres complexes — forme trigonométrique

5.1 Module

Soit $z = a + b\,i$; on appelle *module* de z, et l'on note $|z|$, le réel positif $\sqrt{a^2+b^2}$.

Démontrer les propriétés suivantes :

1) $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\,\overline{z}}$

2) $|z| = 0 \iff z = 0$

3) $|\lambda\, z| = |\lambda|\,|z| \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

4) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$

5) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

6) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

5.2 Plan complexe

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé.

– À tout nombre complexe $z = a + b\,i$, on associe le point $\mathrm{Z}(a\,;b)$, appelé *point image* de z.
– Réciproquement, à tout point $\mathrm{Z}(a\,;b)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = a + b\,i$, appelé *affixe* de Z.

Représenter dans le plan complexe les points images des nombres suivants :

1) $a = 2 + i$

2) $b = 2 - i$

3) $c = 3 + \frac{3}{2}\,i$

4) $d = 4$

5) $e = -2\,i$

6) $f = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

5.3 Forme trigonométrique

1) Calculer le module des nombres complexes suivants :

$a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \qquad a_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \qquad a_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$a_4 = 1 + \sqrt{3}\,i \qquad a_5 = -1 + \sqrt{3}\,i \qquad a_6 = -1 - \sqrt{3}\,i$

$b_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i \qquad b_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i \qquad b_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

$b_4 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i \qquad b_5 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i \qquad b_6 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i$

2) On considère les nombres complexes suivants :

$a'_1 = 2\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4})\right) \qquad a'_2 = 2\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$

$a'_3 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$a'_4 = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{\pi}{3})\right) \qquad a'_5 = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$

$a'_6 = 2\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\,\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)$

$b'_1 = 3\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4})\right) \qquad b'_2 = 3\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$

$b'_3 = 3\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$b'_4 = 3\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{\pi}{3})\right) \qquad b'_5 = 3\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$

$b'_6 = 3\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\,\sin(-\frac{2\pi}{3})\right)$

Que vaut le module de chacun de ces nombres complexes ? En calculant les valeurs exactes des cosinus et des sinus, que remarque-t-on ?

3) Représenter les images des nombres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et b_6 dans le plan complexe.

4) Pour tout nombre complexe non nul z, il existe des nombres uniques $r > 0$ et $\varphi \in]-\pi\,;\pi]$ tels que $z = r\,\big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$.
Cette écriture est appelée la *forme trigonométrique* de z.
Remarquer que $r = |z|$, c'est-à-dire que r est le module de z.
On appelle *argument* de z, et on le note $\arg(z)$, le nombre φ.
Interpréter géométriquement le module r et l'argument φ.

5.4 Soit $z = r\,\big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$ un nombre complexe. Montrer que :
$|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
en d'autres termes $\overline{z} = r\,\big(\cos(-\varphi) + i\,\sin(-\varphi)\big)$.

5.5 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes dont le module et l'argument sont les suivants :

1) $r = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$	2) $r = 2 \quad \varphi = \pi$	3) $r = \sqrt{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$
4) $r = \frac{1}{2} \quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}$	5) $r = 2 \quad \varphi = -\frac{5\pi}{6}$	6) $r = \sqrt{3} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$

5.6 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

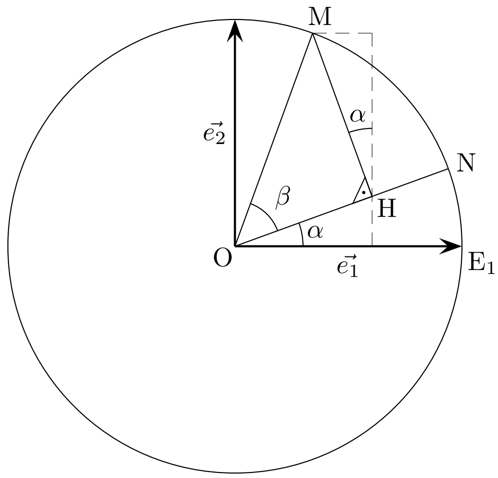
1) $2 + 2\,i$	2) $3\sqrt{3} + 3\,i$	3) $1 - \sqrt{3}\,i$
4) $5\,i$	5) -3	6) $-2\sqrt{3} - 2\,i$
7) $-7 - 7\,i$	8) $-3\,i$	9) $\sin(\alpha) + i\,\cos(\alpha)$

5.7 **Formules trigonométriques** $\cos(\alpha + \beta)$ **et** $\sin(\alpha + \beta)$

Considérons le cercle trigonométrique dans le plan muni du repère orthonormé canonique $(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

Les points N et M sont situés sur le cercle trigonométrique de façon à former avec l'axe $\mathrm{OE_1}$ des angles valant respectivement α et $\alpha + \beta$.

Le point H est la projection orthogonale du point M sur la droite ON.



1) Exprimer, dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en fonction de l'angle $\alpha + \beta$.
2) (a) Quelle est la longueur du segment OH ?
   (b) En déduire, dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ en fonction des angles α et β.
3) (a) Quelle est la longueur du segment HM ?
   (b) En inférer, dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ en fonction des angles α et β.

4) Au vu de la relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$, conclure aux formules :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\sin(\beta) \end{aligned}}$$

5.8 Soient $z_1 = r_1\big(\cos(\varphi_1)+i\,\sin(\varphi_1)\big)$ et $z_2 = r_2\big(\cos(\varphi_2)+i\,\sin(\varphi_2)\big)$ deux nombres complexes. Démontrer ces propriétés :

1) $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|$ et $\arg(z_1\,z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
en d'autres termes : $z_1\,z_2 = r_1\,r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$

2) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
en d'autres termes : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\big(\cos(\varphi) - i\,\sin(\varphi)\big)$

3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
en d'autres termes : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)$

5.9 **Formule de moivre**

Soit $z = r\,\big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$ un nombre complexe. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$z^n = \Big(r\,\big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)\Big)^n = r^n\,\big(\cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi)\big)$$

5.10 Déterminer, sans effectuer les calculs, le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1) $(1-i)\,(-3\,i)$ 2) $(-2\,i)^{10}$ 3) $(1+\sqrt{3}\,i)^2$

4) $(-1+i)^5\,(2+2\,i)^4$ 5) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{30}$ 6) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i}\right)^{17}$

5.11 Soient les nombres complexes $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ et $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i$.

1) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $z_1\,z_2$.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$.

5.12 **Extraction des racines**

Soient $z = r\,\big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$ un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}$. On appelle racine n^{e} de z tout nombre complexe qui, élevé à la puissance n, vaut z.

1) Soit $z' = r'\,\big(\cos(\varphi') + i\,\sin(\varphi')\big)$ une racine n^{e} de z. Montrer que $r' = \sqrt[n]{r}$ et que $n\,\varphi' = \varphi + 2\,k\,\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

2) En déduire que tout nombre complexe non nul $z = r\big(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\big)$ possède exactement n racines n^{e} distinctes données par la formule :

$$\boxed{\sqrt[n]{r}\,\Big(\cos\big(\tfrac{\varphi+2\,k\,\pi}{n}\big) + i\,\sin\big(\tfrac{\varphi+2\,k\,\pi}{n}\big)\Big) \quad \text{avec } k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

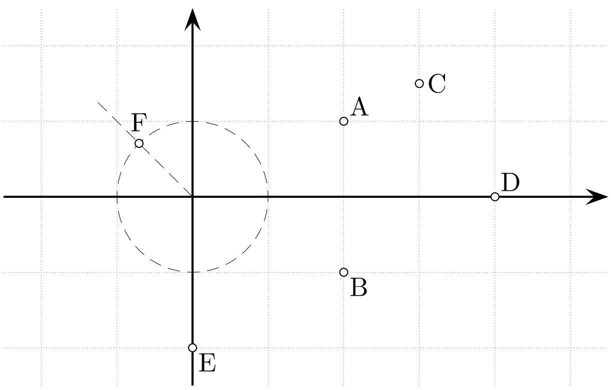
5.13 Déterminer, sous forme trigonométrique et sous forme algébrique, toutes les racines suivantes ; les représenter ensuite dans le plan complexe.

1) $\sqrt{4\,i}$ 2) $\sqrt[3]{8}$ 3) $\sqrt[4]{-1}$ 4) $\sqrt[6]{-1}$

5.14 Représenter dans le plan complexe les solutions de l'équation $z^5 + 243 = 0$.

Réponses

5.2

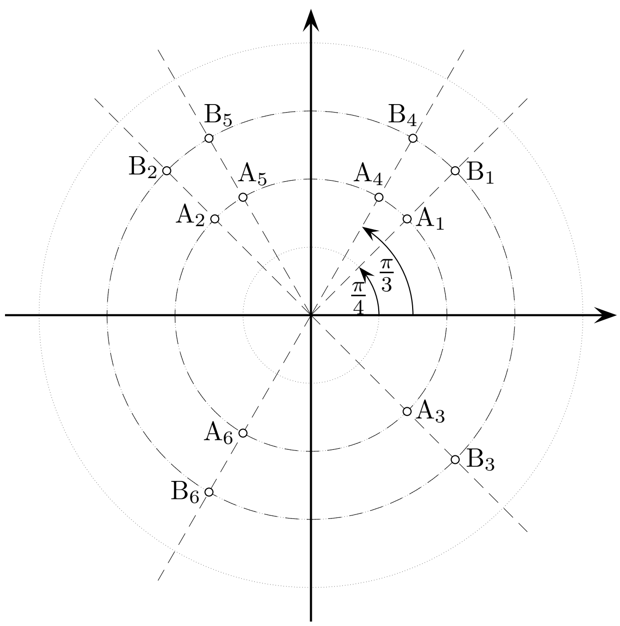


5.3

1) $|a_1| = |a_2| = |a_3| = |a_4| = |a_5| = |a_6| = 2$
$|b_1| = |b_2| = |b_3| = |b_4| = |b_5| = |b_6| = 3$

2) $|a'_n| = 2$ et $a'_n = a_n$ pour tout $n \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
$|b'_n| = 3$ et $b'_n = b_n$ pour tout $n \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

3)



4) r exprime la distance du point z à l'origine ; φ représente l'angle, mesuré en radians, entre le demi-axe $\mathbb{R}_+$ et la demi-droite OZ.

5.5

1) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ 2) -2 3) $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

4) $-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,i$ 5) $-\sqrt{3} - i$ 6) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$

5.6

1) $r = 2\sqrt{2}\quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ 2) $r = 6\quad \varphi = \frac{\pi}{6}$ 3) $r = 2\quad \varphi = -\frac{\pi}{3}$

4) $r = 5\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$ 5) $r = 3\quad \varphi = \pi$ 6) $r = 4\quad \varphi = -\frac{5\pi}{6}$

7) $r = 7\sqrt{2}\quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}$ 8) $r = 3\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$ 9) $r = 1\quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$

5.7

1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

2) (a) $\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \cos(\beta)$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\,\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\,\cos(\beta) \end{pmatrix}$

3) (a) $\|\overrightarrow{\mathrm{HM}}\| = \sin(\beta)$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{HM}} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha)\,\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\,\sin(\beta) \end{pmatrix}$

5.10

1) $r = 3\sqrt{2}\quad \varphi = -\frac{3\pi}{4}$ 2) $r = 1024\quad \varphi = \pi$ 3) $r = 4\quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

4) $r = 256\sqrt{2}\quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$ 5) $r = 1\quad \varphi = 0$ 6) $r = 1\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

5.11

1) $z_1 = 2\big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{\pi}{3})\big)$ $\quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$

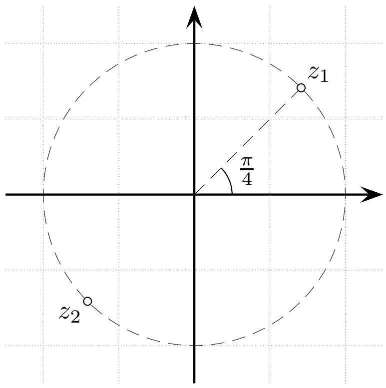
2) $z_1\,z_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,i = \sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\,\sin(\frac{\pi}{12})\big)$

3) $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5.13

1) $z_1 = 2\big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4})\big) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

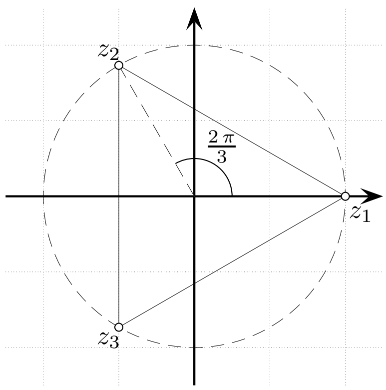
$z_2 = 2\big(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{5\pi}{4})\big) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$



2) $z_1 = 2\big(\cos(0) + i\,\sin(0)\big) = 2$

$z_2 = 2\big(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{3})\big) = -1 + \sqrt{3}\,i$

$z_3 = 2\big(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{3})\big) = -1 - \sqrt{3}\,i$

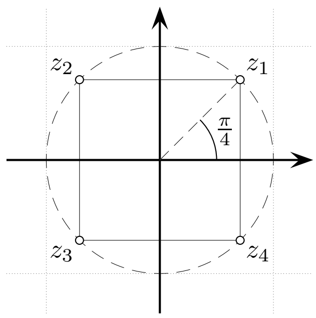


3) $z_1 = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$z_2 = \cos(\frac{3\,\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{3\,\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$z_3 = \cos(\frac{5\,\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{5\,\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

$z_4 = \cos(\frac{7\,\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{7\,\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$



4) $z_1 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$

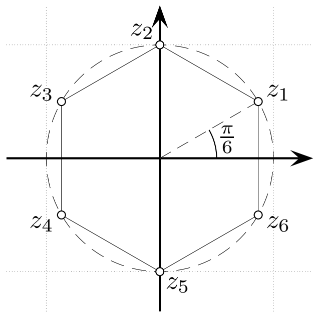
$z_2 = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\sin(\frac{\pi}{2}) = i$

$z_3 = \cos(\frac{5\,\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{5\,\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$

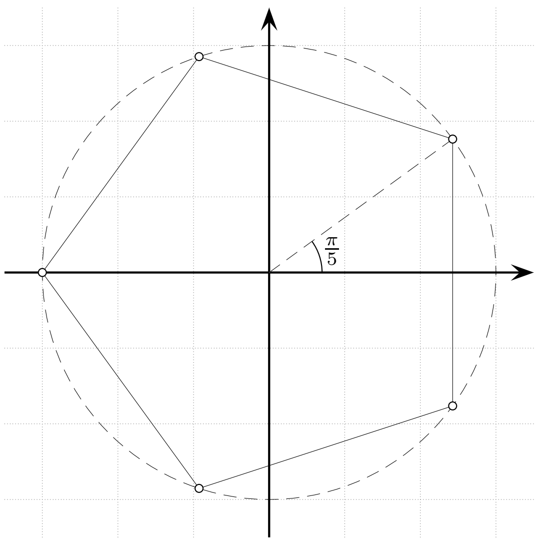
$z_4 = \cos(\frac{7\,\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{7\,\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$

$z_5 = \cos(\frac{3\,\pi}{2}) + i\,\sin(\frac{3\,\pi}{2}) = -i$

$z_6 = \cos(\frac{11\,\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{11\,\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$



5.14



5.15 1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2\,z + 4 = 0$.

2) Soit u la solution de partie imaginaire positive. Calculer u^{10}.

5.16 1) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $1-i$ et $\sqrt{3}-i$.

2) Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

3) En déduire les valeurs de $\cos(-\frac{\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{\pi}{12})$.

4) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{5\,\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\,\pi}{12})$.
Indication : multiplier par i.

5.17 Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Écrire, sous forme trigonométrique, z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3) Résoudre l'équation $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\,\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\,\sin(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.

5.18 1) En calculant la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $\big(\cos(\alpha) + i\,\sin(\alpha)\big)^2$, établir les formules de duplication :

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\,\alpha) = 2\,\cos(\alpha)\,\sin(\alpha)$$

2) De même, en considérant le cube du nombre complexe $\cos(\alpha) + i\,\sin(\alpha)$, établir les formules trigonométriques :

$$\cos(3\,\alpha) = \cos(\alpha)\,\big(1 - 4\,\sin^2(\alpha)\big) = \cos(\alpha)\,\big(4\,\cos^2(\alpha) - 3\big)$$
$$\sin(3\,\alpha) = \sin(\alpha)\,\big(4\,\cos^2(\alpha) - 1\big) = \sin(\alpha)\,\big(3 - 4\,\sin^2(\alpha)\big)$$

3) Vérifier que les solutions de l'équation $8\,x^3 - 6\,x - 1 = 0$ sont $\cos(\frac{\pi}{9})$, $\cos(\frac{7\,\pi}{9})$ et $\cos(\frac{13\,\pi}{9})$.

Réponses

5.15 1) $u = 1 + \sqrt{3}\,i \qquad v = 1 - \sqrt{3}\,i$ 2) $-512 - 512\,\sqrt{3}\,i$

5.16 1) $1 - i = \sqrt{2}\,\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})\big) \qquad \sqrt{3} - i = 2\,\big(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{6})\big)$

2) $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\,i = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\big(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{12})\big)$

3) $\cos(-\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad \sin(-\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

4) $\cos(\frac{5\,\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \sin(\frac{5\,\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5.17 1) $z_1 = \sqrt{2}\,\big(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{6})\big) \qquad z_2 = \sqrt{2}\,\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$
$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\frac{\pi}{12}) + i\,\sin(\frac{\pi}{12})$

3) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{5\,\pi}{12} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$