**5.1** 1) $|\overline{z}| = |a - b\,i| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

L'exercice 4.4 1) a montré que $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$, d'où suit immédiatement que $\sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ .

2) (a) Si $z = 0$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

(b) Soit $z = a + b\,i$ un nombre complexe tel que $|z| = 0$.

$0 \leqslant |a| = \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = 0$ impose $|a| = 0$, d'où $a = 0$.

De même, $0 \leqslant |b| = \sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = 0$ donne $b = 0$.

Par conséquent, $z = 0 + 0\,i = 0$.

3) $|\lambda\,z| = |\lambda\,(a + b\,i)| = |\lambda\,a + \lambda\,b\,i| = \sqrt{(\lambda\,a)^2 + (\lambda\,b)^2} = \sqrt{\lambda^2\,a^2 + \lambda^2\,b^2} = \sqrt{\lambda^2\,(a^2 + b^2)} = |\lambda|\,\sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda|\,|z|$

4) $|z_1\,z_2| = \sqrt{z_1\,z_2\,\overline{z_1\,z_2}} = \sqrt{z_1\,z_2\,\overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1\,\overline{z_1}\,z_2\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1\,\overline{z_1}}\,\sqrt{z_2\,\overline{z_2}} = |z_1|\,|z_2|$

Autre preuve :

$|z_1\,z_2| = |(a_1 + b_1\,i)\,(a_2 + b_2\,i)| = |(a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,i| =$
$\sqrt{(a_1\,a_2 - b_1\,b_2)^2 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)^2} =$
$\sqrt{a_1^2\,a_2^2 - 2\,a_1\,a_2\,b_1\,b_2 + b_1^2\,b_2^2 + a_1^2\,b_2^2 + 2\,a_1\,a_2\,b_1\,b_2 + a_2^2\,b_1^2} =$
$\sqrt{a_1^2\,a_2^2 + a_1^2\,b_2^2 + b_1^2\,a_2^2 + b_1^2\,b_2^2} = \sqrt{a_1^2\,(a_2^2 + b_2^2) + a_2^2\,(a_2^2 + b_2^2)} =$
$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}\,\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)} = |z_1|\,|z_2|$

5) $1 = |1| = \left|z \cdot \dfrac{1}{z}\right| = |z|\,\left|\dfrac{1}{z}\right|$ donne (en divisant par $|z|$) $\dfrac{1}{|z|} = \left|\dfrac{1}{z}\right|$

Autre preuve :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{z}\,\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\overline{z}}} = \sqrt{\frac{1}{z\,\overline{z}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{z\,\overline{z}}} = \frac{1}{|z|}$$

Autre preuve :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{a + b\,i}\right| = \left|\frac{1\,(a - b\,i)}{(a + b\,i)\,(a - b\,i)}\right| = \left|\frac{a - b\,i}{a^2 + b^2}\right| = \left|\frac{1}{a^2 + b^2}\,(a - b\,i)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{a^2 + b^2}\right|\,|a - b\,i| = \frac{1}{a^2 + b^2}\,\sqrt{a^2 + (-b)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

6) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1|\,\left|\dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1|\,\dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$