2 Congruences

2.1 L'aiguille des secondes de ma montre indique 17 secondes. Combien de secondes indiquera-t-elle dans

1) 55 secondes ? 2) 555 secondes ? 3) 5555 secondes ?

2.2 Sachant que le 1er janvier 2002 était un mardi, déterminer les jours correspondant aux dates suivantes :

1) 29 janvier 2002
2) 12 mars 2002
3) 1er janvier 2003
4) 23 avril 2005

2.3 Quelle est la date du millième dimanche du XXIe siècle ?

Remarque : le premier jour du XXIe siècle est le 1er janvier 2001.

Soit m un entier relatif non nul. Deux entiers relatifs a et b sont dits **congrus modulo** m s'ils ont même reste dans la division par m. On note alors :

$$a \equiv b \mod m\,.$$

2.4 Trouver le plus petit nombre supérieur ou égal à 0 qui est congru à a modulo m. Un tel nombre s'appelle **le plus petit résidu non négatif** de a modulo m.

1) $a = 3412$ $m = 4$
2) $a = 177$ $m = 9$
3) $a = 31$ $m = 31$
4) $a = 31$ $m = 25$
5) $a = 365$ $m = 5$
6) $a = -3122$ $m = 3$
7) $a = 31458687312$ $m = 10$
8) $a = -259874629$ $m = 10$

2.5 Trouver tous les nombres compris entre 1950 et 2000, qui sont congrus à a modulo m :

1) $a = 1 \quad m = 13$ 2) $a = 1776 \quad m = 40$ 3) $a = 1929 \quad m = 15$

2.6 Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $a \equiv b \mod m$
2) $m \mid (a - b)$
3) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + k\,m$

2.7 Prouver par récurrence que $6 \cdot 4^n \equiv 6 \mod 9$ pour tout $n \geqslant 0$.

2.8 Soient a, b, c et m des entiers relatifs avec m non nul. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $a \equiv a \mod m$
2) si $a \equiv b \mod m$, alors $b \equiv a \mod m$
3) si $a \equiv b \mod m$ et $b \equiv c \mod m$, alors $a \equiv c \mod m$

On résume ces propriétés en disant que la congruence modulo m constitue une **relation d'équivalence** sur l'ensemble des entiers relatifs.

2.9 Soient a, b, c, d et m des entiers relatifs avec m non nul. On suppose que

$$a \equiv b \mod m \quad \text{et} \quad c \equiv d \mod m\,.$$

Montrer les propriétés suivantes :

1) $a + c \equiv b + d \mod m$
2) $a\,c \equiv b\,d \mod m$
3) $a^n \equiv b^n \mod m \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2.10 Peut-on simplifier une congruence comme suit ?

$$2\,a \equiv 2\,b \mod m \quad \text{donc} \quad a \equiv b \mod m$$

Même question si m est impair.

2.11

1) Quel est le reste de la division de 352^{14546} par 5 ?
2) Quel est le reste de la division de 8^{237} par 9 ?
3) Quel est le reste de la division de 7^{888} par 15 ?
4) Quel est le reste de la division de 13^{1545} par 11 ?

2.12 Quel est le chiffre des unités de 4568^{12534} ?

2.13 Montrer que $5^n + 6^n \equiv 0 \mod 11$ pour tout entier naturel impair n.

2.14 Montrer que $7 \mid (3^{2n} - 2^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.15

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^k par 9.
2) Soit a un entier naturel, écrit $\overline{a_n\,a_{n-1}\,\ldots\,a_2\,a_1\,a_0}$ en base 10.
   Désignons par $\sigma(a) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ la somme de ses chiffres.
   Montrer que $a \equiv \sigma(a) \mod 9$.
3) Retrouver le critère connu de divisibilité par 9.

2.16

1) Déterminer le reste de la division de 10^k par 11.
2) Soit a un entier naturel, écrit $\overline{a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_2\, a_1\, a_0}$ en base 10.
Désignons par $\alpha(a) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n\, a_n$ la somme alternée de ses chiffres.
Montrer que $a \equiv \alpha(a) \mod 11$.
3) Énoncer un critère de divisibilité par 11.
4) Les nombres 425612 et 415781 sont-ils des multiples de 11 ?

2.17 Démontrer qu'un nombre est divisible par 2^n si et seulement si le nombre formé par ses n derniers chiffres est divisible par 2^n.

2.18

1) Compléter le tableau suivant :

$x \equiv \ldots \mod 4$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \ldots \mod 4$				

2) Quels sont les restes possibles dans la division par 4 d'une somme de deux carrés ?
3) Prouver que le cercle centré à l'origine et de rayon $5\sqrt{7}$ ne possède aucun point à coordonnées entières.

2.19 En étudiant les congruences modulo 4, montrer que l'équation $7\,x^2 - 4\,y^2 = 1$ n'a pas de solution entière.

2.20 En étudiant les congruences modulo 5, démontrer que si les entiers x, y et z vérifient $x^2 + y^2 = z^2$, alors l'un au moins est divisible par 5.

Réponses

2.1 1) 12 secondes 2) 32 secondes 3) 52 secondes

2.2 1) mardi 2) mardi 3) mercredi 4) samedi

2.3 1er mars 2020

2.4 1) 0 2) 6 3) 0 4) 6
5) 0 6) 1 7) 2 8) 1

2.5 1) 1951 ; 1964 ; 1977 ; 1990 2) 1976 3) 1959 ; 1974 ; 1989

2.11 1) 4 2) 8 3) 1 4) 10

2.12 4

2.18 1)

$x \equiv \ldots \mod 4$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \ldots \mod 4$	0	1	0	1

2) 0, 1 ou 2