2.6 1) $\Longrightarrow$ 2)

La division euclidienne de a et b par m permet d'écrire

$$a = m\,q + r \quad \text{et} \quad b = m\,q' + r'\,.$$

L'hypothèse $a \equiv b \mod m$ signifie que $r = r'$.

Donc $a - b = (m\,q + r) - (m\,q' + r') = m\,(q - q') + \underbrace{(r - r')}_{0} = m\,(q - q')$

Ainsi $a - b$ est un multiple de m ou, si l'on préfère, $m \mid (a - b)$.

2) $\Longrightarrow$ 3)

L'hypothèse $m \mid (a - b)$ signifie qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = m\,q$.

Il en résulte $a - m\,q = b$.

En posant $k = -q$, on obtient $a + k\,m = b$.

3) $\Longrightarrow$ 1)

La division euclidienne de a par m donne

$$a = m\,q + r \quad \text{avec } 0 \leqslant r < m\,.$$

On suppose l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + k\,m$.

Alors $b = a + k\,m = (m\,q + r) + k\,m = m\,(q + k) + r$ avec $0 \leqslant r < m$.

Étant donné que le quotient et le reste de la division euclidienne de b par m sont uniques, l'égalité $b = m\,(q + k) + r$ avec $0 \leqslant r < m$ implique que le reste de la division euclidienne de b par m est également r.

On a montré que a et b possèdent le même reste r dans la division euclidienne par m, c'est-à-dire $a \equiv b \mod m$.