2.9 Puisque $a \equiv b \mod m$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + k\,m$.
De même, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $d = c + k'\,m$.

1) $b + d = (a + k\,m) + (c + k'\,m) = (a + c) + (k + k')\,m$
En posant $k'' = k + k'$, on obtient $b + d = (a + c) + k''\,m$ avec $k'' \in \mathbb{Z}$.
Ceci revient à dire que $a + c \equiv b + d \mod m$.

2) $b\,d = (a + k\,m)\,(c + k'\,m) = a\,c + a\,k'\,m + c\,k\,m + k\,k'\,m^2$
$\quad = a\,c + (a\,k' + c\,k + k\,k'\,m)\,m$
En posant $k'' = a\,k' + c\,k + k\,k'\,m$, on trouve $b\,d = a\,c + k''\,m$ avec $k'' \in \mathbb{Z}$.
On en tire que $a\,c \equiv b\,d \mod m$.

3) Montrons par récurrence que $a^n \equiv b^n \mod m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

$a^1 \equiv b^1 \mod m$ est vérifié, puisque l'on suppose $a \equiv b \mod m$.

Hérédité

Supposons $a^n \equiv b^n \mod m$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant la propriété 2) avec $c = a^n$ et $d = b^n$, on obtient :
$a \cdot a^n \equiv b \cdot b^n \mod m$, c'est-à-dire $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod m$.