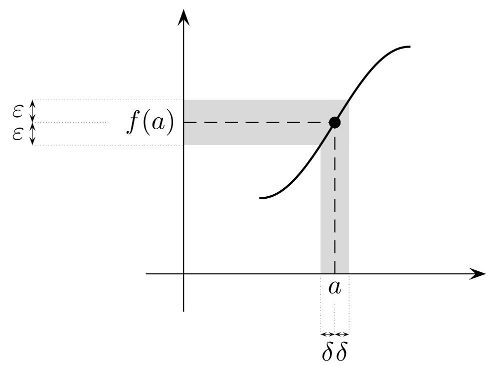
2 Continuité

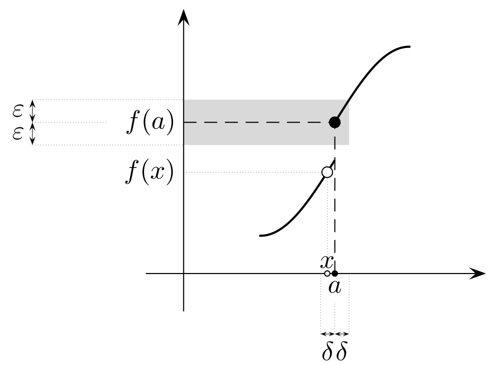
La continuité est une notion intuitivement simple : une fonction est **continue** si l'on peut tracer son graphe sans lever le crayon. La formalisation rigoureuse de cette intuition ne se fait toutefois pas sans efforts...

On dit qu'une fonction f est **continue au point** a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $\lvert x-a\rvert < \delta$ on ait $\lvert f(x)-f(a)\rvert < \varepsilon$.



Cette définition veut dire que, lorsqu'une fonction est continue en un point a, la différence $f(x) - f(a)$ peut être aussi petite que l'on veut, pour autant que la différence $x - a$ soit suffisamment petite. En d'autres termes, $f(x)$ est infiniment proche de $f(a)$, pour autant que x soit suffisamment proche de a.

On dit qu'une fonction f est **discontinue au point** a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe $x \in \mathrm{D}_f$ avec $\lvert x - a\rvert < \delta$ et $\lvert f(x) - f(a)\rvert \geqslant \varepsilon$.



Lorsqu'une fonction est discontinue au point a, il y a alors un « saut ». Il existe ainsi un seuil $\varepsilon > 0$ qui séparera toujours $f(a)$ et un certain $f(x)$, quand bien même x est aussi proche de a que l'on veut.

On dit d'une fonction f qu'elle est **continue** si elle est continue en tout point de son ensemble de définition.

On dit d'une fonction f qu'elle est **discontinue** s'il existe un point de son ensemble de définition où elle est discontinue.

2.1 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ est continue.

2.2 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ est continue.

2.3 Le but de cet exercice est de prouver la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Montrer que la fonction f est continue en $a = 0$.
2) Soit $a > 0$.
   (a) Vérifier l'égalité $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que la fonction f est continue en a.
   Indication : $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geqslant \sqrt{a}$

2.4 La fonction **partie entière** est la fonction $\mathrm{E} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : $\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x ; c'est donc l'unique entier tel que $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$.

1) Représenter graphiquement la fonction partie entière.
2) Au vu du graphique, quels sont les points où la fonction partie entière est discontinue ?
3) Prouver que la fonction partie entière est discontinue au point $a = 2$.

Proposition *Soient f et g deux fonctions continues. Alors la fonction $f + g$ est aussi une fonction continue.*

Preuve Soit $a \in \mathrm{D}_{f+g}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est continue au point a, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x - a| < \delta_1$ on ait $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Comme g est continue au point a, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_g$ avec $|x - a| < \delta_2$ on ait $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour tout $x \in \mathrm{D}_{f+g}$ avec $|x - a| < \delta$, on a :
$\big|(f+g)(x) - (f+g)(a)\big| = |f(x)+g(x)-f(a)-g(a)| = |f(x)-f(a)+g(x)-g(a)|$
$\leqslant |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$

Proposition *Soient f une fonction continue et λ un nombre réel. Alors la fonction λf est aussi une fonction continue.*

Preuve Soit $a \in \mathrm{D}_f$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Supposons $\lambda = 0$.
   Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ on a $|\lambda\, f(x) - \lambda\, f(a)| = |0 \cdot f(x) - 0 \cdot f(a)| = 0 < \varepsilon$.
2) Supposons $\lambda \neq 0$.
   Puisque f est continue au point a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta$ on ait $|f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$.
   Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta$ on a $|\lambda\, f(x) - \lambda\, f(a)| =$
   $\big|\lambda\,\big(f(x) - f(a)\big)\big| = |\lambda|\,|f(x) - f(a)| < |\lambda| \cdot \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

Proposition *Soient f et g deux fonctions continues. Alors la fonction $f \cdot g$ est aussi une fonction continue.*

Preuve Soit $a \in \mathrm{D}_{f+g}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme f est continue au point a, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta_1$ on ait $|f(x) - f(a)| < 1$.
En d'autres termes, pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta_1$, on a $f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$. En posant $\mathrm{M} = \max(|f(a) - 1|, |f(a) + 1|)$, on obtient $|f(x)| < \mathrm{M}$.
Puisque f est continue au point a, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta_2$ on ait $|f(x) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|g(a)|}$.
Puisque g est continue au point a, il existe $\delta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_g$ avec $|x-a| < \delta_3$ on ait $|g(x) - g(a)| < \dfrac{\varepsilon}{2\,\mathrm{M}}$.
Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Pour tout $x \in \mathrm{D}_{fg}$ avec $|x-a| < \delta$, on a
$|fg(x) - fg(a)| = |f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)| =$
$|f(x)\,g(x) - f(x)\,g(a) + f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a)| \leqslant$
$|f(x)\,g(x) - f(x)\,g(a)| + |f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a)| =$
$|f(x)|\,|g(x) - g(a)| + |g(a)|\,|f(x) - f(a)| < \mathrm{M} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2\,\mathrm{M}} + |g(a)| \cdot \dfrac{\varepsilon}{2\,|g(a)|} = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2.5
1) Montrer que la fonction $f(x) = x^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que la fonction $f(x) = \lambda\, x^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) Montrer que toute fonction polynomiale est continue.

Proposition *Soient f et g deux fonctions continues. Alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi une fonction continue.*

Preuve Vu la proposition précédente, il suffit de prouver la continuité de la fonction $\dfrac{1}{g}$.
Soit $a \in \mathrm{D}_g$ avec $g(a) \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme g est continue au point a, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_g$ avec $|x-a| < \delta_1$ on ait $|g(x) - g(a)| < \frac{1}{2}\,|g(a)|$.
Ainsi si $x \in \mathrm{D}_g$ avec $|x-a| < \delta_1$, on obtient
$|g(a)| = |g(a) - g(x) + g(x)| \leqslant |g(a) - g(x)| + |g(x)| < \frac{1}{2}\,|g(a)| + |g(x)|$
d'où suit, en soustrayant par $\frac{1}{2}\,|g(a)|$, que $\frac{1}{2}\,|g(a)| < |g(x)|$.
Puisque g est continue au point a, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_g$ avec $|x-a| < \delta_2$ on ait $|g(x) - g(a)| < \dfrac{|g(a)|^2\,\varepsilon}{2}$.
Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors pour tout $x \in \mathrm{D}_{\frac{1}{g}}$ avec $|x-a| < \delta$ on a
$\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(a)}\right| = \left|\dfrac{g(a) - g(x)}{g(x)\,g(a)}\right| = |g(x) - g(a)| \cdot \dfrac{1}{|g(x)|} \cdot \dfrac{1}{|g(a)|} <$
$\dfrac{|g(a)|^2\,\varepsilon}{2} \cdot \dfrac{2}{|g(a)|} \cdot \dfrac{1}{|g(a)|} = \varepsilon$.

2.6 On appelle **fonction rationnelle** toute fonction qui s'écrit comme un rapport de fonctions polynomiales.
Montrer que toute fonction rationnelle est continue.

Proposition *Soient f et g deux fonctions continues. Alors la fonction $g \circ f$ est aussi une fonction continue.*

Preuve Soit $a \in \mathrm{D}_{g\circ f}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme g est continue en $f(a)$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $y \in \mathrm{D}_g$ avec $|y - f(a)| < \delta_1$ on ait $\big|g(y) - g\big(f(a)\big)\big| < \varepsilon$.
Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta$ on ait $|f(x) - f(a)| < \delta_1$.
Alors pour tout $x \in \mathrm{D}_{g\circ f}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $\big|g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)\big| < \varepsilon$.

2.7 Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$ est continue.

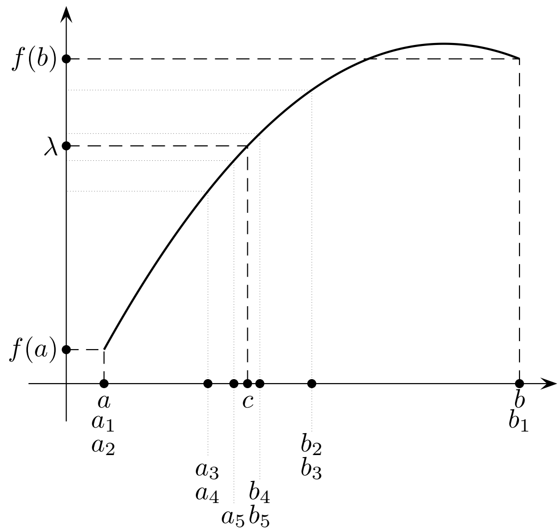
Théorème *Soient f une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers a avec $u_n \in \mathrm{D}_f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathrm{D}_f$. Alors*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(a)}\,.$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$.
Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ avec $|x-a| < \delta$ on ait $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n - a| < \delta$.
On conclut que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$.

Théorème de la valeur intermédiaire *Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*

Preuve Sans perte de généralité, on suppose que $f(a) \leqslant f(b)$.



On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

1) on pose $a_1 = a$ et $b_1 = b$.
2) soit $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ le milieu de a_n et b_n ;
   - si $f(m_n) \geqslant \lambda$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$;
   - si $f(m_n) < \lambda$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, tandis que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, on constate que $a \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b, elle converge vers une limite c. De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par a, elle converge vers une limite d.

Par conséquent, la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d-c$. Mais le terme général de cette suite est $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ qui converge manifestement vers 0. Il en résulte que $d - c = 0$, c'est-à-dire $d = c$.

Par construction, on a $f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par passage à la limite, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$.
Comme f est continue, on obtient $f(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n)$ au vu du précédent théorème, c'est-à-dire $f(c) \leqslant \lambda \leqslant f(c)$.
On a ainsi montré l'existence de $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Remarque : la méthode utilisée dans cette preuve s'appelle la **dichotomie**[1].

1. Ce terme provient du mot grec διχοτομία qui signifie « division en deux parties égales ».

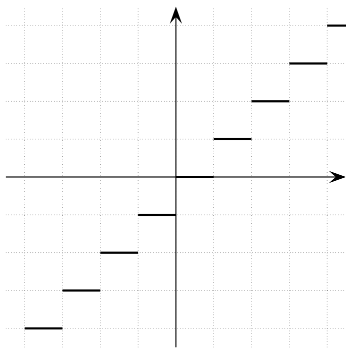
2.8 Montrer que l'équation $x^3 - 5\,x^2 + 7\,x - 9 = 100$ a une solution. Déterminer cette solution au centième près.

2.9
1) Montrer que l'équation $x^5 - 3\,x^4 - 2\,x^3 - x + 1 = 0$ a une solution comprise entre 0 et 1. Déterminer cette solution au centième près.
2) Y a-t-il d'autres solutions ?

2.10
1) Quelle hypothèse faut-il faire pour résoudre l'équation $x = \cos(x)$ par dichotomie ?
2) En admettant que cette hypothèse soit vérifiée, déterminer la solution de cette équation au centième près.

2.11 Soit $\mathrm{E}(x)$ la fonction partie entière définie à l'exercice 2.2.
1) On constate que $\mathrm{E}(0) = 0$ et $\mathrm{E}(1) = 1$. Existe-t-il un nombre x dans l'intervalle $[0\,;1]$ tel que $\mathrm{E}(x) = \frac{1}{2}$?
2) Qu'est-ce que cela montre ?

Réponses

2.4
1) 

2) La fonction partie entière est discontinue sur $\mathbb{Z}$.

2.8 $x \approx 6{,}50$

2.9
1) $x \approx 0{,}52$
2) $x = -1$ et $x \approx 3{,}58$

2.10
1) La fonction $f(x) = \cos(x)$ est continue.
2) $x \approx 0{,}74$

2.11
1) non
2) La fonction $\mathrm{E}(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.