2.3 La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est définie que si l'argument de la racine carrée est positif, c'est-à-dire si $x \geqslant 0$. C'est pourquoi $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$.

1) Soit $\varepsilon > 0$ un nombre positif quelconque (arbitrairement petit).

   On doit prouver l'existence d'un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ avec $|x - 0| < \delta$ on ait $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

   On doit donc avoir $|f(x)-f(0)| = |\sqrt{x}-\sqrt{0}| = |\sqrt{x}-0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \varepsilon$.
   Cette inégalité implique $x < \varepsilon^2$.

   Par conséquent, en posant $\delta = \varepsilon^2$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ avec $|x - 0| = |x| = x < \delta$, on a bien $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \varepsilon$.

   On a ainsi démontré la continuité de la fonction f en 0.

2) Soit $a > 0$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
   $$\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \sqrt{x} - \sqrt{a}\,.$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ un nombre positif quelconque (arbitrairement petit).

   Il faut montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ avec $|x - a| < \delta$ on ait $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   On veut donc avoir $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \dfrac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \leqslant \dfrac{|x-a|}{|\sqrt{a}|} = |x-a|\,\dfrac{1}{\sqrt{a}} < \varepsilon$.

   Cette inégalité est vérifiée si $|x - a| < \varepsilon\,\sqrt{a}$. C'est pourquoi, en choisissant $\delta = \varepsilon\,\sqrt{a}$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ avec $|x - a| < \delta$, on a bien $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   On a de la sorte prouvé la continuité de la fonction f en a.