2.5 1) Montrons par récurrence que la fonction $f(x) = x^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation a été établie à l'exercice 2.2 : la fonction $f(x) = x$ est continue.

Supposons que la fonction $f(x) = x^n$ est continue pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ est également continue :

(a) la fonction $f(x) = x^n$ est continue par hypothèse de récurrence ;

(b) la fonction $f(x) = x$ est continue ;

(c) le produit de fonctions continues donne une fonction continue.

2) On sait que si f est une fonction continue et que $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda\, f$ est également continue.
En appliquant cette proposition au cas où $f(x) = x^n$, on conclut aussitôt que la fonction $\lambda\, f(x) = \lambda\, x^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Soit f une fonction polynomiale.
Il existe $n \in \mathbb{N}$ et λ_0, λ_1, λ_2, ..., $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \lambda_n\, x^n + \ldots + \lambda_2\, x^2 + \lambda_1\, x + \lambda_0$.
D'après le résultat précédent, chacune des fonctions $f_0(x) = \lambda_0$, $f_1(x) = \lambda_1\, x$, $f_2(x) = \lambda_2\, x^2$, ..., $f_n(x) = \lambda_n\, x^n$ est continue.
Puisque la somme de fonctions continues donne encore une fonction continue, on déduit successivement que
la fonction $\lambda_1\, x + \lambda_0$ est continue ;
la fonction $\lambda_2\, x^2 + \lambda_1\, x + \lambda_0$ est continue ;
...
la fonction $\lambda_n\, x^n + \ldots + \lambda_2\, x^2 + \lambda_1\, x + \lambda_0$ est continue.
En d'autres termes, la fonction polynomiale f est bien continue.