2.8 La fonction $f(x) = x^3 - 5\,x^2 + 7\,x - 9$ est continue, vu qu'elle est polynomiale.

On constate que $f(-10) = -1579$ et que $f(10) = 561$.
Comme $-1579 \leqslant 100 \leqslant 561$, le théorème de la valeur intermédiaire nous garantit l'existence d'un nombre $c \in [-10\,;10]$ tel que $f(c) = 100$.

On calcule que $f(0) = -9$ et on sait déjà que $f(10) = 561$.
Vu que $-9 \leqslant 100 \leqslant 561$, le théorème de la valeur intermédiaire nous assure qu'il existe $c \in [0\,;10]$ tel que $f(c) = 100$.

On remarque que $f(5) = 26$ et on a toujours $f(10) = 561$.
Puisque $26 \leqslant 100 \leqslant 561$, le théorème de la valeur intermédiaire nous certifie que l'on peut trouver $c \in [5\,;10]$ tel que $f(c) = 100$.

On obtient $f(7) = 138$ et on rappelle que $f(5) = 26$.
Sachant que $26 \leqslant 100 \leqslant 138$, le théorème de la valeur intermédiaire nous apprend qu'il existe $c \in [5\,;7]$ tel que $f(c) = 100$.

On calcule que $f(6) = 69$ et on se souvient que $f(7) = 138$.
Comme $69 \leqslant 100 \leqslant 138$, on déduit l'existence de $c \in [6\,;7]$ tel que $f(c) = 100$, grâce au théorème de la valeur intermédiaire.

On obtient que $f(6{,}5) = 99{,}875$ et on a toujours $f(7) = 138$.
Attendu que $99{,}875 \leqslant 100 \leqslant 138$, le théorème de la valeur intermédiaire nous assure l'existence de $c \in [6{,}5\,;7]$ tel que $f(c) = 100$.

Plutôt que d'appliquer mécaniquement l'algorithme de dichotomie, remarquons que $f(6{,}5)$ fournit un résultat très légèrement inférieur à 100. C'est pourquoi nous sommes en droit de nous attendre à ce que la solution recherchée soit très légèrement supérieure à 6,5.

On constate que $f(6{,}51) = 100{,}563\ 951$.
Vu que $99{,}875 \leqslant 100 \leqslant 100{,}563\ 951$, on sait, par le théorème de la valeur intermédiaire, qu'il existe $c \in [6{,}5\,;6{,}51]$ tel que $f(c) = 100$.

On calcule que $f(6{,}505) = 100{,}219\ 112\ 625$.
L'inégalité $99{,}875 \leqslant 100 \leqslant 100{,}219\ 112\ 625$ et le théorème de la valeur intermédiaire nous garantissent l'existence de $c \in [6{,}5\,;6{,}505]$ tel que $f(c) = 100$.

Puisque l'on recherche une solution de l'équation $f(x) = 100$ avec une précision de l'ordre du centième, on peut conclure qu'approximativement $x \approx 6{,}50$.