# 6 Critères de convergence d'une série

**6.1** Considérons la série de terme général $u_k$ .

1) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{i=1}^{k-1} u_i \quad (k \geqslant 2)$ .
2) En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$ si la série de terme général $u_k$ converge.
3) Est-il vrai que la série de terme général $u_k$ converge si $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$ ?
4) Montrer que si $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k \neq 0$, alors la série de terme général $u_k$ diverge.

**6.2** Prouver la divergence des séries suivantes :

1) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$
2) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{5}{11} + \ldots$

### Critères de comparaison

Explicitons les critères de comparaison auxquels nous avons déjà eu recours au précédent chapitre.

Remarquons tout d'abord que l'ajout ou la suppression d'un nombre **fini** de termes ne modifie pas la convergence ou la divergence d'une série. C'est pourquoi, seul le comportement des termes au-delà d'un certain rang $p$ détermine la nature de la série (mais non sa somme).

On considère deux séries à termes positifs $u_k$ et $v_k$ et on note $p$ un entier naturel.

1) Si $u_k \leqslant v_k$ pour tout $k \geqslant p$ et que la série de terme $v_k$ converge, alors la série de terme $u_k$ converge.
   En d'autres termes, une série majorée par une série convergente est également convergente.
2) Si $u_k \geqslant v_k$ pour tout $k \geqslant p$ et que la série de terme $v_k$ diverge, alors la série de terme $u_k$ diverge.
   En d'autres termes, une série minorée par une série divergente est également divergente.

**6.3** Utiliser les critères de comparaison pour étudier la convergence des séries.

1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{2\,k} + \ldots$
2) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 + \ldots + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k + \ldots$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}}+\ldots$

4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{12}+\ldots+\dfrac{k+2}{k\,(k+1)}+\ldots$

5) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\ldots+\dfrac{1}{k^2+1}+\ldots$

6) $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{31}+\ldots+\dfrac{1}{10\,k+1}+\ldots$

**6.4** **Critère d'équivalence**

On considère deux séries à termes positifs $u_k$ et $v_k$ .

Si $\mathrm{L}=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{u_k}{v_k}\neq 0$ et $\mathrm{L}\neq+\infty$, alors les séries considérées sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes ; on dit qu'elles sont **équivalentes**.

Le but de cet exercice est de prouver le critère d'équivalence.

1) Justifier qu'il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}$ avec $0<\varepsilon<\mathrm{L}$ . Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\left|\dfrac{u_k}{v_k}-\mathrm{L}\right|<\varepsilon$ pour tout $k\geqslant p$ .
2) En déduire les inégalités $(\mathrm{L}-\varepsilon)\,v_k<u_k<(\mathrm{L}+\varepsilon)\,v_k$ pour tout $k\geqslant p$ .
3) Prouver le critère d'équivalence.

**6.5** Appliquer le critère d'équivalence aux séries de l'exercice 6.3 $\big($sauf 2)$\big)$.

**6.6** **Critère du quotient (d'Alembert)**

On considère une série de terme positif $u_k\geqslant 0$ . Supposons que $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{u_{k+1}}{u_k}=c$ .

Le critère du quotient affirme que

1) si $c<1$, alors la série converge ;
2) si $c>1$, alors la série diverge ;
3) si $c=1$, alors on ne peut conclure.

Il s'agit dans cet exercice de prouver ces affirmations.

1) On suppose que $c<1$ . Il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que $c<r<1$ .
   (a) Justifier qu'il existe un entier $p$ tel que $\frac{u_{k+1}}{u_k}<r$ pour tout $k\geqslant p$ .
   (b) En déduire qu'à partir du rang $p$, la série de terme $u_k$ est majorée par la série géométrique de premier terme $u_p$ et de raison $r$ .
   (c) En conclure que la série de terme $u_k$ converge.
2) On suppose que $c>1$ . Il existe $r\in\mathbb{R}$ tel que $1<r<c$ .
   (a) Justifier qu'il existe un entier $p$ tel que $\frac{u_{k+1}}{u_k}>r$ pour tout $k\geqslant p$ .

(b) En déduire qu'à partir du rang $p$, la série de terme $u_k$ est minorée par la série géométrique de premier terme $u_p$ et de raison $r$.

(c) En conclure que la série de terme $u_k$ diverge.

3) En considérant tour à tour les séries de terme $\dfrac{k}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k\,(k+1)}$, justifier que le critère du quotient ne permet pas de conclure lorsque $c = 1$.

**6.7** Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de d'Alembert.

1) $\dfrac{1!}{10} + \dfrac{2!}{100} + \dfrac{3!}{1000} + \ldots + \dfrac{k!}{10^k} + \ldots$

2) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{k+2}{2^k} + \ldots$

3) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \dfrac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \dfrac{3^k}{k \cdot 2^k} + \ldots$

4) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{k!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2\,k+1)} + \ldots$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{2\,k-1}{(\sqrt{2})^k} + \ldots$

6) $\dfrac{2}{1} + \dfrac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3\,k-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4\,k-3)} + \ldots$

**6.8** **Critère de la racine (Cauchy)**

On considère une série de terme positif $u_k \geqslant 0$. Supposons que $\lim\limits_{k \to +\infty} \sqrt[k]{u_k} = c$.

Le critère de la racine affirme que

1) si $c < 1$, alors la série converge ;
2) si $c > 1$, alors la série diverge ;
3) si $c = 1$, alors on ne peut conclure.

Il s'agit dans cet exercice de prouver les deux premières affirmations.

1) On suppose que $c < 1$. Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $c < r < 1$.

(a) Justifier qu'il existe un entier $p$ tel que $\sqrt[k]{u_k} < r$ pour tout $k \geqslant p$.

(b) En déduire qu'à partir du rang $p$, la série de terme $u_k$ est majorée par une série géométrique de raison $r$.

(c) En conclure que la série de terme $u_k$ converge.

2) On suppose que $c > 1$. Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $1 < r < c$.

(a) Justifier qu'il existe un entier $p$ tel que $\sqrt[k]{u_k} > r$ pour tout $k \geqslant p$.

(b) En déduire qu'à partir du rang $p$, la série de terme $u_k$ est minorée par une série géométrique de raison $r$.

(c) En conclure que la série de terme $u_k$ diverge.

**6.9** Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de Cauchy.

1) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^k} + \ldots$

2) $\dfrac{1}{180} + \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{80} + \ldots + \dfrac{3^k}{180 \cdot 2^k} + \ldots$

3) $\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{4}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \ldots + \left(\dfrac{2\,k}{3\,k+1}\right)^k + \ldots$

4) $\dfrac{2}{1} + \left(\dfrac{3}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\dfrac{k+1}{2\,k-1}\right)^k + \ldots$

**6.10** **Critère de l'intégrale**

On considère $p$ un entier positif, $f$ une fonction positive décroissante dans l'intervalle $[p\,; +\infty[$ et une série de terme général $u_k = f(k)$ pour $k \in [p\,; +\infty[$. Le critère de l'intégrale affirme que la série converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

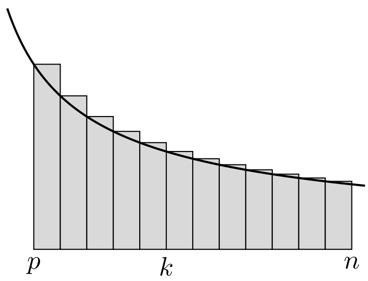
Le but de cet exercice est de montrer cette dernière affirmation.

1) (a) Justifier que $f(x) \leqslant u_k$ pour tout $x \in [k\,; k+1]$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant u_k$.

(c) En tirer que $\displaystyle\int_p^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} u_k$.

(d) En inférer que $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$.

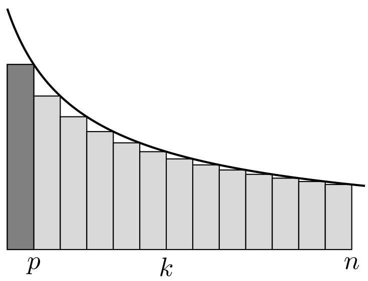



2) (a) Justifier que $f(x) \geqslant u_k$ pour tout $x \in [k-1\,; k]$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant u_k$.

(c) En tirer que $\displaystyle\int_p^{n} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=p+1}^{n} u_k$.

(d) En inférer que $\displaystyle u_p + \int_p^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$.




3) Conclure que $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} u_k$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

**6.11** Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de l'intégrale.

1) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \cdots + \dfrac{1}{(k+1)^2 - 1} + \ldots$

2) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{(3\,k-2)\,(3\,k+1)} + \ldots$

3) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} + \cdots + \dfrac{k}{k^2+1} + \ldots$

4) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{9}{19} + \cdots + \dfrac{k^2}{2\,k^2+1} + \ldots$

### Séries alternées

Une **série alternée** est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une série alternée s'écrit $(-1)^{k+1}\,u_k$ avec $u_k \geqslant 0$ .

**6.12** **Convergence d'une série alternée : critère de Leibniz**

On considère une série alternée de terme général $(-1)^{k+1}\,u_k$ avec $u_k \geqslant 0$ .

On suppose que $u_{k+1} \leqslant u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$ .

Le critère de Leibniz affirme que, dans ces conditions, la série alternée converge.

1) Considérons les sommes partielles d'indices pairs.
   (a) En écrivant $s_{2\,n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{2\,n-1} - u_{2\,n})$ , montrer que la suite des sommes partielles d'indices pairs $(s_{2\,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) En écrivant $s_{2\,n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - u_{2\,n}$ , montrer que la suite des sommes partielles d'indices pairs $(s_{2\,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $u_1$.
   (c) En déduire la convergence de la suite des sommes partielles d'indices pairs $(s_{2\,n})_{n \in \mathbb{N}}$.
2) De manière analogue, montrer que la suite des sommes partielles d'indices impairs $(s_{2\,n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente.
3) Il reste à montrer que la limite des sommes partielles d'indices pairs et la limite des sommes partielles d'indices impairs coïncident.
   En d'autres termes, prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_{2\,n+1} - \lim\limits_{n \to +\infty} s_{2\,n} = 0$ .

### Séries absolument convergentes et semi-convergentes

On considère une série de terme $u_k$ . Si la série de terme $|u_k|$ converge, alors on dit que la série de terme $u_k$ **converge absolument**.

**6.13** Le but de cet exercice est de montrer que toute série absolument convergente est convergente.

Soit une série de terme $u_k$ qui converge absolument. On définit deux séries à termes positifs par

$$v_k = \begin{cases} u_k & \text{si } u_k \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_k < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_k = \begin{cases} 0 & \text{si } u_k \geqslant 0 \\ -u_k & \text{si } u_k < 0 \end{cases}$$

1) Vérifier que $v_k \leqslant |u_k|$ et $w_k \leqslant |u_k|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) En déduire la convergence des séries de terme $v_k$ et $w_k$.
3) En considérant la série de terme $v_k - w_k$, prouver que la série de terme $u_k$ converge.

**6.14** La réciproque du théorème précédent est-elle vraie ? Est-ce que toute série convergente est aussi absolument convergente ?

On appelle **semi-convergente** une série qui converge, mais qui ne converge pas absolument.

**6.15** Étudier la convergence des séries alternées suivantes. Dans le cas de convergence, dire si les séries sont absolument convergentes ou semi-convergentes.

1) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{2\,k-1} + \ldots$

2) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} + \ldots$

3) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \ldots$

4) $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}\,k}{6\,k-5} + \ldots$

5) $\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \ldots + (-1)^{k+1}\,\frac{2\,k+1}{k\,(k+1)} + \ldots$

6) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{5\,k} + \ldots$

## Réponses

**6.3** 1) diverge 2) converge 3) diverge
4) diverge 5) converge 6) diverge

**6.7** 1) diverge 2) converge 3) diverge
4) converge 5) converge 6) converge

**6.9** 1) converge 2) diverge 3) converge 4) converge

**6.11** 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\Bigg|_1^{+\infty} = \tfrac{1}{2}\ln(3)$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)}\,dx = \tfrac{1}{9}\ln\left|\frac{3\,x-2}{3\,x+1}\right|\Bigg|_1^{+\infty} = \tfrac{1}{9}\ln(4)$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln|x^2+1|\Bigg|_1^{+\infty}$ diverge

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2\,x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\,x - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x)\Bigg|_1^{+\infty}$

Mais le critère de l'intégrale ne peut pas s'appliquer !

**6.15** 1) semi-convergente 2) semi-convergente
3) absolument convergente 4) divergente
5) semi-convergente 6) semi-convergente