6.1

1) $\sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{i=1}^{k-1} u_i = (u_1 + u_2 + \ldots u_{k-1} + u_k) - (u_1 + u_2 + \ldots u_{k-1}) = u_k$

2) Supposons que la série de terme u_k converge et posons $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{i=1}^{k-1} u_i = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} u_i - \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k-1} u_i = \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0$$

3) Il est faux que la série de terme général u_k converge si $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

L'exemple de la série harmonique le prouve : $\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$ et pourtant la série harmonique diverge.

4) Supposons, par l'absurde, que la série de terme u_k converge.

D'après le résultat obtenu en 2), on devrait avoir $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\lim_{k\to+\infty} u_k \neq 0$.

On conclut ainsi que la série de terme u_k diverge.