6.10 1) (a) $x \in [k\,;k+1] \iff k \leqslant x \leqslant k+1$

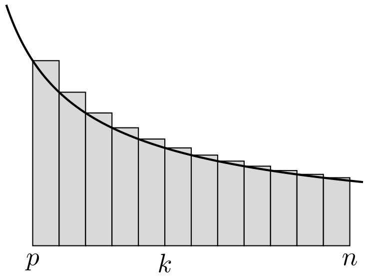
Étant donné que la fonction f est décroissante, il s'ensuit :

$u_k = f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1)$

(b) Vu que $f(x) \leqslant u_k$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} u_k\,dx = u_k\,x\Big|_k^{k+1} = u_k\,(k+1) - u_k\,k = u_k$$

(c)



$$\int_p^n f(x)\,dx = \int_p^{p+1} f(x)\,dx + \ldots + \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$
$$\leqslant u_p + \ldots + u_k + \ldots + u_{n-1} = \sum_{k=p}^{n-1} u_k$$

(d) Vu que $\displaystyle\int_p^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} u_k$, on obtient, par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_p^n f(x)\,dx \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=p}^{n-1} u_k \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_p^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$$

2) (a) $x \in [k-1\,;k] \iff k-1 \leqslant x \leqslant k$

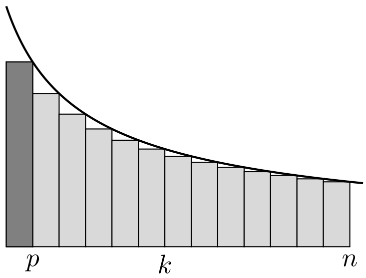
Étant donné que la fonction f est décroissante, il s'ensuit :

$f(k-1) \geqslant f(x) \geqslant f(k) = u_k$

(b) Vu que $f(x) \geqslant u_k$, on a :

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} u_k\,dx = u_k\,x\Big|_{k-1}^{k} = u_k\,k - u_k\,(k-1) = u_k$$

(c)



$$\int_p^n f(x)\,dx = \int_p^{p+1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$
$$\geqslant u_{p+1} + \ldots + u_k + \ldots + u_n = \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(d) De $\displaystyle\int_p^n f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=p+1}^{n} u_k$, on tire que :

$$u_p + \int_p^n f(x)\,dx \geqslant u_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_k$$

En effectuant le passage à la limite, il en résulte :

$$u_p + \lim_{n\to+\infty} \int_p^n f(x)\,dx \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} u_k$$

à savoir $\displaystyle u_p + \int_p^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$

3) (a) Supposons que $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Alors la série $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} u_k$ converge, car elle est majorée par $\displaystyle u_p + \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$.

(b) Supposons que $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Alors la série $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} u_k$ diverge, car elle est minorée par l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$ qui diverge.