6.11 1) Posons $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2 - 1} = \dfrac{1}{\big((x+1)-1\big)\,\big((x+1)+1\big)} = \dfrac{1}{x\,(x+2)}$.

Étudions le signe de la fonction f :

		-2		0	
1	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$
x	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$
$x+2$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$
f	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

Étudions la croissance de la fonction f :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x\,(x+2)}\right)' = -\frac{\big(x\,(x+2)\big)'}{\big(x\,(x+2)\big)^2} = -\frac{(x)'\,(x+2) + x\,(x+2)'}{x^2\,(x+2)^2}$$

$$= -\frac{x+2+x}{x^2\,(x+2)^2} = -\frac{2\,x+2}{x^2\,(x+2)^2} = -\frac{2\,(x+1)}{x^2\,(x+2)^2}$$

		-2		-1		0	
-2	$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$-$
$x+1$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
x^2	$+$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$+$
f'	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Puisque la fonction f est positive et décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, le critère de l'intégrale peut s'appliquer.

Pour déterminer une primitive de la fonction f, décomposons-la en fractions simples :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2-1} = \frac{1}{\big((x+1)-1\big)\,\big((x+1)+1\big)} = \frac{1}{x\,(x+2)}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{x} + \frac{\mathrm{B}}{x+2} = \frac{\mathrm{A}\,(x+2) + \mathrm{B}\,x}{x\,(x+2)} = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,x + 2\,\mathrm{A}}{x\,(x+2)}$$

$$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ 2\,\mathrm{A} \quad\;\;\; = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{B} = -\frac{1}{2} \\ \mathrm{A} = \;\;\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x\,(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \tfrac{1}{2}\,\ln\big(|x|\big) - \tfrac{1}{2}\big(|x+2|\big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\ln\big(|x|\big) - \ln\big(|x+2|\big)\Big) = \tfrac{1}{2}\,\ln\Big(\big|\tfrac{x}{x+2}\big|\Big)$$

Appliquons à présent le critère de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{2}\,\ln\Big(\big|\tfrac{t}{t+2}\big|\Big) - \tfrac{1}{2}\,\ln\Big(\big|\tfrac{1}{1+2}\big|\Big)$$

Vu que le logarithme népérien est une fonction continue, on peut permuter cette fonction avec la limite pour avoir :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\,\ln\Big(\lim_{t\to+\infty}\big|\tfrac{t}{t+2}\big|\Big) - \tfrac{1}{2}\,\ln\Big(\big|\tfrac{1}{1+2}\big|\Big) = \tfrac{1}{2}\,\ln(1) - \tfrac{1}{2}\,\ln(\tfrac{1}{3})$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\,\ln(3) = \ln(\sqrt{3})$$

On en conclut que cette série converge.

2) Posons $f(x) = \dfrac{1}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)}$.

Étudions le signe de la fonction f :

		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
1	$+$	‖	$+$	‖	$+$
$3\,x-2$	$-$	‖	$-$	‖	$+$
$3\,x+1$	$-$	‖	$+$	‖	$+$
f	$+$	‖	$-$	‖	$+$

Étudions la croissance de la fonction f :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)}\right)' = -\frac{\big((3\,x-2)\,(3\,x+1)\big)'}{\big((3\,x-2)\,(3\,x+1)\big)^2}$$

$$= -\frac{(3\,x-2)'\,(3\,x+1)+(3\,x-2)\,(3\,x+1)'}{(3\,x-2)^2\,(3\,x+1)^2}$$

$$= -\frac{3\,(3\,x+1)+(3\,x-2)\,3}{(3\,x-2)^2\,(3\,x+1)^2} = -\frac{18\,x-3}{(3\,x-2)^2\,(3\,x+1)^2}$$

$$= \frac{-3\,(6\,x-1)}{(3\,x-2)^2\,(3\,x+1)^2}$$

		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{3}$	
-3	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$
$6\,x-1$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$(3\,x-2)^2$	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$
$(3\,x+1)^2$	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$
f'	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$
f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$

Puisque la fonction f est positive et décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, le critère de l'intégrale peut s'appliquer.

Pour déterminer une primitive de la fonction f, décomposons-la en fractions simples :

$$f(x) = \frac{1}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)} = \frac{\mathrm{A}}{3\,x-2}+\frac{\mathrm{B}}{3\,x+1} = \frac{\mathrm{A}\,(3\,x+1)+\mathrm{B}\,(3\,x-2)}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)}$$
$$= \frac{(3\,\mathrm{A}+3\,\mathrm{B})\,x+(\mathrm{A}-2\,\mathrm{B})}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)}$$

$$\begin{cases} 3\,\mathrm{A} + 3\,\mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} - 2\,\mathrm{B} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A} - 2\,\mathrm{B} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ -3\,\mathrm{B} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = \frac{1}{3} \\ \mathrm{B} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{(3\,x-2)\,(3\,x+1)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{3\,x-2} - \frac{\frac{1}{3}}{3\,x+1}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{3\,x-2}\,dx - \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{3\,x+1}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\int \frac{3}{3\,x-2}\,dx - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\int \frac{3}{3\,x+1}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{9}\,\ln\big(|3\,x-2|\big) - \tfrac{1}{9}\,\ln\big(|3\,x+1|\big)$$
$$= \tfrac{1}{9}\Big(\ln\big(|3\,x-2|\big) - \ln\big(|3\,x+1|\big)\Big) = \tfrac{1}{9}\,\ln\Big(\big|\tfrac{3\,x-2}{3\,x+1}\big|\Big)$$

Appliquons à présent le critère de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\tfrac{1}{9}\,\ln\Big(\big|\tfrac{3\,t-2}{3\,t+1}\big|\Big) - \tfrac{1}{9}\,\ln\Big(\big|\tfrac{3\cdot1-2}{3\cdot1+1}\big|\Big)$$

Vu que le logarithme népérien est une fonction continue, on peut permuter cette fonction avec la limite pour avoir :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \tfrac{1}{9}\,\ln\Big(\lim_{t\to+\infty}\big|\tfrac{3\,t-2}{3\,t+1}\big|\Big) - \tfrac{1}{9}\,\ln\Big(\big|\tfrac{3\cdot1-2}{3\cdot1+1}\big|\Big) = \tfrac{1}{9}\,\ln(1) - \tfrac{1}{9}\,\ln(\tfrac{1}{4})$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{9}\,\ln(4) = \tfrac{2}{9}\,\ln(2)$$

On en conclut que cette série converge.

3) Posons $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Étudions le signe de la fonction f :

		0	
x	$-$		$+$
x^2+1	$+$		$+$
f	$-$		$+$

Étudions la croissance de la fonction f :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'\,(x^2+1) - x\,(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2\,x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1+x)\,(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

		-1		1	
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$		$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Puisque la fonction f est positive et décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, le critère de l'intégrale peut s'appliquer.

Déterminons une primitive de f :

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\,\ln(x^2+1)$$

L'application du critère de l'intégrale donne :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{2}\,\ln(t^2+1) - \tfrac{1}{2}\,\ln(1^2+1)$$

Vu que le logarithme népérien est une fonction continue, on peut permuter cette fonction avec la limite pour avoir :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\,\ln(\lim_{t\to+\infty} t^2+1) - \tfrac{1}{2}\,\ln(1^2+1) = \ln(+\infty) - \ln(2) = +\infty$$

Il en résulte que cette série diverge.

4) Posons $f(x) = \dfrac{x^2}{2\,x^2+1}$.

Étudions le signe de la fonction f :

		0	
x^2	$+$		$+$
$2\,x^2+1$	$+$		$+$
f	$+$		$+$

Étudions la croissance de la fonction f :

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2\,x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)'\,(2\,x^2+1) - x^2\,(2\,x^2+1)'}{(2\,x^2+1)^2} = \frac{4\,x^3+2\,x-4\,x^3}{(2\,x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2\,x}{(2\,x^2+1)^2}$$

		0	
$2\,x$	$-$	0	$+$
$(2\,x^2+1)^2$	$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

On constate que la fonction f est positive, mais *croissante* sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, si bien que le critère de l'intégrale ne peut pas s'appliquer !

On établit facilement la divergence de cette série, vu que son terme général ne tend pas vers zéro :

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{2\,k^2+1}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{2\,k^2}=\tfrac{1}{2}\neq 0$$