6.12 1) (a) $s_{2\,(n+1)} - s_{2\,n} = s_{2\,n+2} - s_{2\,n} =$
$\big((u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2\,n-1} - u_{2\,n}) + (u_{2\,n+1} - u_{2\,n+2})\big) -$
$\big((u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2\,n-1} - u_{2\,n})\big) =$
$(u_{2\,n+1} - u_{2\,n+2}) \geqslant 0$

On a donc établi $s_{2\,(n+1)} \geqslant s_{2\,n}$: la suite des sommes partielles d'indices pairs est croissante.

(b) $s_{2\,n} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{u_{2\,n}}_{\geqslant 0} \leqslant u_1$

La suite des sommes partielles d'indices pairs est ainsi majorée par u_1.

(c) Puisque toute suite croissante et majorée converge, on a montré la convergence de la suite des sommes partielles d'indices pairs.

2) (a) $s_{2\,(n+1)-1} - s_{2\,n-1} = s_{2\,n+1} - s_{2\,n-1} =$
$\big((u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2\,n-1} - u_{2\,n}) + u_{2\,n+1}\big) -$
$\big((u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + u_{2\,n-1}\big) =$
$-\,u_{2\,n} + u_{2\,n+1} = -\underbrace{(u_{2\,n} - u_{2\,n+1})}_{\geqslant 0} \leqslant 0$

On a montré $s_{2\,(n+1)-1} \leqslant s_{2\,n-1}$, à savoir la décroissante de la suite des sommes partielles d'indices impairs.

(b) $s_{2\,n-1} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geqslant 0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geqslant 0} + \ldots + u_{2\,n-1} \geqslant u_{2\,n-1} \geqslant 0$

Par conséquent, la suite des sommes partielles d'indices impairs est minorée par 0.

(c) Attendu que toute suite décroissante et minorée converge, la suite des sommes partielles d'indices impairs est convergente.

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} s_{2\,n+1} - \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} s_{2\,n+1} - s_{2\,n} =$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2\,n} + u_{2\,n+1}) - (u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2\,n}) =$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2\,n+1} = 0$

On conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_{2\,n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} s_{2\,n}$.