6.15 1) Posons $u_k = \dfrac{1}{2\,k-1}$.

La série de terme général u_k est équivalente à la série harmonique :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2\,k-1}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2\,k-1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2\,k} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, la série alternée de terme général u_k n'est pas absolument convergente.

(a) $u_{k+1}-u_k = \dfrac{1}{2\,(k+1)-1} - \dfrac{1}{2\,k-1} = \dfrac{1}{2\,k+1} - \dfrac{1}{2\,k-1} = \dfrac{(2\,k-1)-(2\,k+1)}{(2\,k+1)\,(2\,k-1)}$

$$= \frac{-2}{(2\,k+1)\,(2\,k-1)} < 0$$

On a ainsi montré $u_{k+1} < u_k$.

(b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\,k-1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\,k} = 0$

Le critère de Leibniz permet de conclure que la série alternée de terme général u_k est semi-convergente.

2) Posons $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

L'exercice 5.14 a établi la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

La série de terme général u_k n'est donc pas absolument convergente.

(a) Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$k+1 > k$

$\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$

$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

On a ainsi obtenu $u_{k+1} < u_k$.

(b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$

Grâce au critère de Leibniz, on conclut que la série alternée de terme général u_k est semi-convergente.

3) Posons $u_k = \dfrac{1}{k^2}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente, comme l'a établi l'exercice 5.13.

La série de terme général u_k est ainsi absolument convergente.

L'exercice 6.11 montre que la série alternée est également convergente.

4) Posons $u_k = \dfrac{k}{6\,k-5}$.

On constate que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{6\,k-5} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{6\,k} = \frac{1}{6} \neq 0$.

L'exercice 6.1 4) montre que la série de terme général u_k, de même que la série alternée de terme général u_k, divergent.

5) Posons $u_k = \dfrac{2\,k+1}{k\,(k+1)}$.

La série de terme général u_k est équivalente à la série harmonique :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{2\,k+1}{k\,(k+1)}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\,k+1}{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\,k}{k} = 2$$

Par conséquent, la série de terme général u_k n'est pas absolument convergente.

(a)
$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= \frac{2\,(k+1)+1}{(k+1)\big((k+1)+1\big)} - \frac{2\,k+1}{k\,(k+1)} \\ &= \frac{2\,k+3}{(k+1)\,(k+2)} - \frac{2\,k+1}{k\,(k+1)} = \frac{(2\,k+3)\,k-(2\,k+1)\,(k+2)}{k\,(k+1)\,(k+2)} \\ &= \frac{2\,k^2+3\,k-2\,k^2-4\,k-k-2}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{-2\,k-2}{k\,(k+1)\,(k+2)} \\ &= \frac{-2\,(k+1)}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{-2}{k\,(k+2)} < 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, $u_{k+1} < u_k$.

(b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\,k+1}{k\,(k+1)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\,k+1}{k^2+k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\,k}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k} = 0$

Au vu du critère de Leibniz, la série alternée de terme général u_k est semi-convergente.

6) Posons $u_k = \dfrac{1}{5\,k}$.

La série de terme général u_k est équivalente à la série harmonique :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{5\,k}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Il s'ensuit que la série de terme général u_k n'est pas absolument convergente.

(a) Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$k+1 > k$

$5\,(k+1) > 5\,k$

$$\frac{1}{5\,(k+1)} < \frac{1}{5\,k}$$

On a ainsi établi $u_{k+1} < u_k$.

(b) $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{5\,k} = 0$

On conclut que la série alternée de terme général u_k est semi-convergente, à l'aide du critère de Leibniz.