6.3 1) Soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k}$ la somme partielle des n premiers termes.

On constate que $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En d'autres termes, la série de terme $\frac{1}{2\,k}$ vaut la moitié de la série harmonique. Puisque celle-ci diverge, il en va de même pour la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\,k}$.

2) Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{1} = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$

Puisque la série de terme $\frac{1}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k$ est majorée par la série géométrique de raison $r = \frac{2}{5} \in \,]-1\,;1[$, elle converge.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(k+1)\,(k+1)}} = \frac{1}{k+1}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}} > \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = +\infty$

C'est pourquoi la série de terme $\frac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}}$ diverge.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{k+2}{k\,(k+1)} > \frac{k+1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k}$.

Puisque la série harmonique diverge, la série de terme $\frac{k+2}{k\,(k+1)}$ diverge également.

5) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$.

Vu que la série de terme $\frac{1}{k^2}$ converge, la série de terme $\frac{1}{k^2+1}$ converge aussi.

6) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{10\,k+1} > \frac{1}{10\,k+10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k+1}$.

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10\,k+1} > \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{10} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{10} \cdot (+\infty) = +\infty$$

En d'autres termes, la série de terme $\frac{1}{10\,k+1}$ diverge.