6.4

1) Puisque l'on a affaire à deux séries à termes positifs, le rapport $\frac{u_k}{v_k} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Comme l'on suppose $\mathrm{L} \neq 0$, il s'ensuit que $\mathrm{L} > 0$.
Il suffit de choisir ε dans l'intervalle $]0\,;\mathrm{L}[$.

Par définition de la limite d'une suite, il existe $p \in \mathbb{N}$ (n_0 si l'on préfère) tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $\left|\frac{u_k}{v_k} - \mathrm{L}\right| < \varepsilon$.

2) On a les équivalences suivantes :
$\left|\frac{u_k}{v_k} - \mathrm{L}\right| < \varepsilon$
$\frac{u_k}{v_k} \in]\mathrm{L} - \varepsilon\,;\mathrm{L} + \varepsilon[$
$\mathrm{L} - \varepsilon < \frac{u_k}{v_k} < \mathrm{L} + \varepsilon$
$(\mathrm{L} - \varepsilon)\, v_k < u_k < (\mathrm{L} + \varepsilon)\, v_k$

3) (a) Supposons que la série de terme v_k converge.
Alors la série de terme $(\mathrm{L} + \varepsilon)\, v_k$ converge.
L'inégalité $u_k < (\mathrm{L} + \varepsilon)\, v_k$ et les critères de comparaison impliquent que la série de terme u_k converge.

(b) Supposons que la série de terme v_k diverge.
Alors la série de terme $(\mathrm{L} - \varepsilon)\, v_k$ diverge.
L'inégalité $(\mathrm{L} - \varepsilon)\, v_k < u_k$ et les critères de comparaison entraînent la divergence de la série de terme u_k.