6.5 1) On donne $u_k = \dfrac{1}{2\,k}$. Posons $v_k = \dfrac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\,k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2\,k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Comme la série harmonique de terme $v_k = \dfrac{1}{k}$ diverge, la série de terme $u_k = \dfrac{1}{2\,k}$ diverge également.

3) On donne $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}}$. Posons $v_k = \dfrac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{k\,(k+1)}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2+k}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{|k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k} = 1$$

Étant donné que la série harmonique de terme $v_k = \dfrac{1}{k}$ diverge, la série de terme $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k\,(k+1)}}$ diverge aussi.

4) On donne $u_k = \dfrac{k+2}{k\,(k+1)}$. Posons $v_k = \dfrac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k+2}{k\,(k+1)}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k} = 1$$

Puisque la série harmonique de terme $v_k = \dfrac{1}{k}$ diverge, il en va de même pour la série de terme $u_k = \dfrac{k+2}{k\,(k+1)}$.

5) On donne $u_k = \dfrac{1}{k^2+1}$. Posons $v_k = \dfrac{1}{k^2}$.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{k^2+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{k^2} = 1$$

Vu que la série de terme $v_k = \dfrac{1}{k^2}$ converge, la série de terme $u_k = \dfrac{1}{k^2+1}$ est elle aussi convergente.

6) On donne $u_k = \dfrac{1}{10\,k+1}$. Posons $v_k = \dfrac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_k}{v_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{10\,k+1}}{\dfrac{1}{k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{10\,k+1}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{10\,k}=\frac{1}{10}$$

Comme la série harmonique de terme $v_k=\dfrac{1}{k}$ diverge, de même la série de terme $u_k=\dfrac{1}{10\,k+1}$ diverge.