6.6 1) (a) Posons $\varepsilon = r - c > 0$.

Par définition de la limite d'une suite, il existe $p \in \mathbb{N}$ (n_0 si l'on préfère) tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k} - c\right| < \varepsilon$.

En d'autres termes, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} < c + \varepsilon = c + (r - c) = r$.

(b) L'inégalité $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} < r$ pour tout $k \geqslant p$ implique

$\dfrac{u_{p+1}}{u_p} < r$ c'est-à-dire $u_{p+1} < u_p\, r$

$\dfrac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < r$ c'est-à-dire $u_{p+2} < u_{p+1}\, r < u_p\, r^2$

$\dfrac{u_{p+3}}{u_{p+2}} < r$ c'est-à-dire $u_{p+3} < u_{p+2}\, r < u_p\, r^3$

$\dots$

$\dfrac{u_{p+n}}{u_{p+n-1}} < r$ c'est-à-dire $u_{p+n} < u_{p+n-1}\, r < u_p\, r^n$

En d'autres termes, à partir du rang p, la série de terme u_k est majorée par la série géométrique de premier terme u_p et de raison r.

(c) Puisque $0 < r < 1$, la série géométrique de premier terme u_p et de raison r converge.

Les critères de comparaison permettent de conclure que la série de terme u_k converge.

2) (a) Posons $\varepsilon = c - r > 0$.

Par définition de la limite d'une suite, il existe $p \in \mathbb{N}$ (n_0 si l'on préfère) tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k} - c\right| < \varepsilon$.

En d'autres termes, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} > c - \varepsilon = c - (c - r) = r$.

(b) L'inégalité $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} > r$ pour tout $k \geqslant p$ implique

$\dfrac{u_{p+1}}{u_p} > r$ c'est-à-dire $u_{p+1} > u_p\, r$

$\dfrac{u_{p+2}}{u_{p+1}} > r$ c'est-à-dire $u_{p+2} > u_{p+1}\, r > u_p\, r^2$

$\dfrac{u_{p+3}}{u_{p+2}} > r$ c'est-à-dire $u_{p+3} > u_{p+2}\, r > u_p\, r^3$

$\dots$

$\dfrac{u_{p+n}}{u_{p+n-1}} > r$ c'est-à-dire $u_{p+n} > u_{p+n-1}\, r > u_p\, r^n$

En d'autres termes, à partir du rang p, la série de terme u_k est minorée par la série géométrique de premier terme u_p et de raison r.

(c) Puisque $r > 1$, la série géométrique de premier terme u_p et de raison r diverge.

Les critères de comparaison permettent de conclure que la série de terme u_k diverge.

3) (a) Soit $u_k = \dfrac{k}{k+1}\,.$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{k+1}{k+2}}{\dfrac{k}{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{k\,(k+2)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+2\,k+1}{k^2+2\,k}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{k^2} = 1$$

La série de terme u_k diverge, car $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{k} = 1 \neq 0\,.$

(b) Soit $u_k = \dfrac{1}{k\,(k+1)}\,.$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{(k+1)\,(k+2)}}{\dfrac{1}{k\,(k+1)}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k} = 1$$

L'inégalité $\dfrac{1}{k\,(k+1)} < \dfrac{1}{k^2}$ et les critères de comparaison entraînent la convergence de la série de terme $u_k\,.$