6.7 1) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{(k+1)!}{10^{k+1}}}{\dfrac{k!}{10^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{10^k}{10^{k+1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{10}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{10}=+\infty>1$$
La série diverge, au vu du critère de d'Alembert.

2) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{k+3}{2^{k+1}}}{\dfrac{k+2}{2^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+3}{k+2}\cdot\frac{2^k}{2^{k+1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+3}{k+2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{k}\cdot\frac{1}{2}=\lim_{k\to+\infty}1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$$
Le critère de d'Alembert certifie que la série converge.

3) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{3^{k+1}}{(k+1)\cdot 2^{k+1}}}{\dfrac{3^k}{k\cdot 2^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{3^{k+1}}{3^k}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{2^k}{2^{k+1}}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}3\cdot\frac{k}{k}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>1$$
Le critère de d'Alembert conclut à la divergence de la série.

4) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{(k+1)!}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2\,k+1)\cdot(2\,k+3)}}{\dfrac{k!}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2\,k+1)}}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2\,k+1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2\,k+1)\cdot(2\,k+3)}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}(k+1)\cdot\frac{1}{2\,k+3}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{2\,k+3}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{2\,k}=\frac{1}{2}<1$$
Grâce au critère de d'Alembert, on obtient la convergence de la série.

5) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{2\,k+1}{(\sqrt{2})^{k+1}}}{\dfrac{2\,k-1}{(\sqrt{2})^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\,k+1}{2\,k-1}\cdot\frac{(\sqrt{2})^k}{(\sqrt{2})^{k+1}}$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\,k}{2\,k}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$
La convergence de la série est assurée par le critère de d'Alembert.

6) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3\,k-1)\cdot(3\,k+2)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4\,k-3)\cdot(4\,k+1)}}{\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3\,k-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4\,k-3)}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3\,k-1)\cdot(3\,k+2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3\,k-1)} \cdot \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4\,k-3)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4\,k-3)\cdot(4\,k+1)}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} (3\,k+2)\cdot\frac{1}{4\,k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3\,k+2}{4\,k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3\,k}{4\,k} = \frac{3}{4} < 1$$

La convergence de la série résulte du critère de d'Alembert.