6.8 1) (a) Posons $\varepsilon = r - c > 0$.

Par définition de la limite d'une suite, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $\left|\sqrt[k]{u_k} - c\right| < \varepsilon$.

En d'autres termes, pour tout $k \geqslant p$, on obtient :

$\sqrt[k]{u_k} < c + \varepsilon = c + (r - c) = r$.

(b) Soit $k \geqslant p$. L'inégalité $\sqrt[k]{u_k} < r$ implique $u_k < r^k$.

Cela signifie qu'à partir du rang p, la série est majorée par la série géométrique de raison r.

(c) Puisque $r < 1$, on conclut, grâce aux critères de comparaison, que la série converge.

2) (a) Posons $\varepsilon = c - r > 0$.

Par définition de la limite d'une suite, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $\left|\sqrt[k]{u_k} - c\right| < \varepsilon$.

En d'autres termes, pour tout $k \geqslant p$, on obtient :

$\sqrt[k]{u_k} > c - \varepsilon = c - (c - r) = r$.

(b) Soit $k \geqslant p$. L'inégalité $\sqrt[k]{u_k} > r$ implique $u_k > r^k$.

Cela signifie qu'à partir du rang p, la série est minorée par la série géométrique de raison r.

(c) Puisque $r > 1$, on conclut, grâce aux critères de comparaison, que la série diverge.