6.9

1) $$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\sqrt[k]{1}}{\sqrt[k]{2^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$$

La série converge, au vu du critère de Cauchy.

2) $$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\frac{3^k}{180\cdot 2^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\sqrt[k]{3^k}}{\sqrt[k]{180}\cdot\sqrt[k]{2^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[k]{180}\cdot 2}$$

$$=\frac{3}{(\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{180})\cdot 2}=\frac{3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}>1$$

Le critère de Cauchy implique la divergence de la série.

3) $$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2\,k}{3\,k+1}\right)^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\,k}{3\,k+1}=\lim_{k\to+\infty}\frac{2\,k}{3\,k}=\frac{2}{3}<1$$

On conclut, grâce au critère de Cauchy, à la convergence de la série.

4) $$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{2\,k-1}\right)^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k+1}{2\,k-1}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k}{2\,k}=\frac{1}{2}<1$$

Le critère de Cauchy garantit que la série converge.