6 Croissance & Convexité

Théorème de Rolle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

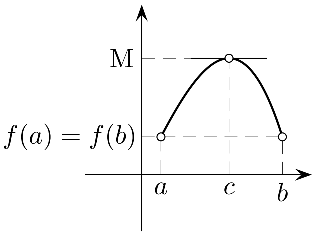
Preuve

1) Si $f(x) \equiv 0$ dans $[a\,;b]$, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a\,;b[$.
2) Si $f(x) \not\equiv 0$, comme $f(x)$ est continue, il existe, au vu du théorème de la valeur intermédiaire, des points où $f(x)$ atteint son maximum M et son minimum m.

   Comme $f(x) \not\equiv 0$, l'un au moins des nombres M ou m est non nul.

   Supposons, par exemple, que $\mathrm{M} \neq 0$ et $f(c) = \mathrm{M}$.

   (a) Si $h > 0$, alors $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$, attendu que $f(c+h) \leqslant \mathrm{M} = f(c)$; il en résulte $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$.

   (b) Si $h < 0$, alors $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$, puisque $f(c+h) \leqslant \mathrm{M} = f(c)$; il en découle $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$.

   Mais, par hypothèse, f est dérivable en tout point de $]a\,;b[$. Aussi la dérivée à droite (a) doit-elle égaler la dérivée à gauche (b). Ceci n'est possible que si elles valent toutes deux zéro, c'est-à-dire $f'(c) = 0$.

   La démonstration est analogue si l'on suppose $m \neq 0$.

On dit qu'une fonction f admet un **maximum local** en c s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $f(x) \leqslant f(c)$ pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{D}_f$.

On dit qu'une fonction f admet un **minimum local** en c s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $f(x) \geqslant f(c)$ pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{D}_f$.

On appelle **extremum local** un maximum local ou un minimum local.

La preuve du théorème de Rolle a montré le corollaire suivant.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$. Si f admet un extremum local en $c \in]a\,;b[$, alors $f'(c) = 0$.

6.1 Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. La fonction f admet-elle un extremum local ?

1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = x^3$ 3) $f(x) = x^3 - x^2$

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$, alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve Posons $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On constate que

1) la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$: $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;
2) $g(a) = f(a) - f(a) - (a - a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$;
3) $g(b) = f(b) - f(a) - (b - a)\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe un nombre c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

6.2 Soit $f(x) = -x^2 + 4\,x$. On pose $a = -1$ et $b = 3$.

1) Trouver explicitement le nombre $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2) Représenter le graphe de f, la droite passant par les points $\mathrm{A}\big(a\,;f(a)\big)$ et $\mathrm{B}\big(b\,;f(b)\big)$, et la tangente au graphe de f en c.
3) Interpréter géométriquement le théorème des accroissements finis.

6.3 Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I si pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
2) f est croissante sur I.

6.4 Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I si pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
2) f est décroissante sur I.

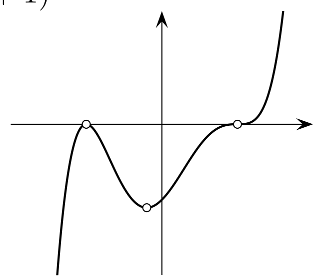
Étudier la croissance d'une fonction dérivable f revient à étudier le signe de sa dérivée f' :

1) si $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante ;
2) si $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante ;
3) si $f'(c) = 0$, alors f admet un point critique en c :
   (a) si $f'(x)$ passe du $+$ au $-$ lorsque x passe de $x < c$ à $x > c$, alors $\big(c\,;f(c)\big)$ est un maximum local de f ;
   (b) si $f'(x)$ passe du $-$ au $+$ lorsque x passe de $x < c$ à $x > c$, alors $\big(c\,;f(c)\big)$ est un minimum local de f ;
   (c) si $f'(x)$ ne change pas de signe lorsque x passe de $x < c$ à $x > c$, alors $\big(c\,;f(c)\big)$ est un replat.

Exemple Étudions la croissance de la fonction $f(x) = (x+1)^2\,(x-1)^3$.

On calcule que $$\begin{aligned} f'(x) &= \big((x+1)^2\big)'\,(x-1)^3 + (x+1)^2\,\big((x-1)^3\big)' \\ &= 2\,(x+1)\,\underbrace{(x+1)'}_{1}\,(x-1)^3 + (x+1)^2\,3\,(x-1)^2\,\underbrace{(x-1)'}_{1} \\ &= (x+1)\,(x-1)^2\,\big(2\,(x-1) + 3\,(x+1)\big) \\ &= (x+1)\,(x-1)^2\,(5\,x+1) \end{aligned}$$

		-1		$-\frac{1}{5}$		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$5\,x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	replat	$\nearrow$



$f(-1) = 0$: le point $(-1\,;0)$ est un maximum local.

$f(-\frac{1}{5}) = -\frac{3456}{3125}$: le point $(-\frac{1}{5}\,;-\frac{3456}{3125})$ est un minimum local.

$f(1) = 0$: le point $(1\,;0)$ est un replat.

6.5 Étudier la croissance des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 + 5\,x + 1$
2) $f(x) = x^3 + 3\,x$
3) $f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{5}{2}\,x^2 + 6\,x + 1$
4) $f(x) = 2\,x^4 - 9\,x^2$
5) $f(x) = \dfrac{4\,x+5}{2\,x-3}$
6) $f(x) = (x-1)^5\,(2\,x+1)^4$
7) $f(x) = x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 1$
8) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

6.6 Quelle est la plus grande et quelle est la plus petite valeur possible de $f(x)$, lorsque x est dans l'intervalle donné :

1) $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [-2\,;1]$
2) $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [1\,;2]$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in [-1\,;2]$
4) $f(x) = (x+3)^3\,(3\,x-1)^2$, $x \in [-2\,;1]$

6.7 Quel est le plus grand nombre : $\dfrac{1,000000000003}{1+1,000000000003^2}$ ou $\dfrac{1,000000000004}{1+1,000000000004^2}$?

6.8 Déterminer k de telle sorte que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+k}$ admette un minimum dont l'ordonnée est égale à 8.

On dit qu'une fonction dérivable f est **convexe** sur un intervalle I si $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\, f'(a)$ pour tout $x, a \in \mathrm{I}$.

On dit qu'une fonction dérivable f est **concave** sur un intervalle I si $f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\, f'(a)$ pour tout $x, a \in \mathrm{I}$.

Vu que $y = f(a) + (x-a)\, f'(a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f en a, cela signifie qu'une fonction est convexe, respectivement concave, lorsque son graphe se situe au-dessus, respectivement en-dessous, de ses tangentes.

Soit f une fonction dérivable. Si f' est à son tour dérivable, alors on appelle **dérivée seconde** de f la fonction f'' définie par $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$.

Proposition *Soit f une fonction admettant une dérivée seconde sur un intervalle* I. *Si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors la fonction f est convexe sur* I.

Preuve Soient $x, a \in \mathrm{I}$.

1) Supposons $x = a$.
   $f(a) + (x-a)\, f'(a) = f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a) = f(x) \leqslant f(x)$.
2) Supposons $x > a$.
   Le théorème des accroissements finis garantit l'existence de $c \in \,]a\,;x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
   Par hypothèse, $f'' > 0$ sur I, si bien que la fonction f' est croissante sur I.
   Ainsi $c > a$ implique $f'(c) \geqslant f'(a)$.
   On obtient donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant f'(a)$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant f(a)+(x-a)\, f'(a)$.
3) Supposons $x < a$.
   De même, il existe $c \in \,]x\,;a[$ tel que $f'(c) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$.
   Comme f' est croissante sur I, $c < a$ implique $f'(c) \leqslant f'(a)$. Par conséquent $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant f'(a)$, ce qui donne $f(a) - f(x) \leqslant (a-x)\, f'(a)$, puis en multipliant par -1 : $f(x) - f(a) \geqslant (x-a)\, f'(a)$. On conclut finalement que $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\, f'(a)$.

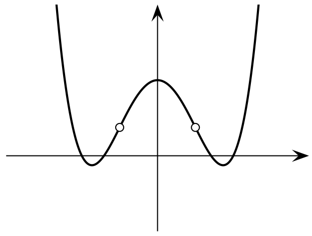
6.9 Soit f une fonction admettant une dérivée seconde sur un intervalle I. Montrer que si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors la fonction f est concave sur I.

Étudier la convexité d'une fonction f admettant une dérivée seconde revient à étudier le signe de sa dérivée seconde f'' :

1) si $f''(x) > 0$, alors f est convexe ;
2) si $f''(x) < 0$, alors f est concave ;
3) si $f''(c) = 0$ et que f'' change de signe au voisinage du point c, alors le point $\big(c\,;f(c)\big)$ est un **point d'inflexion**.

Exemple Étudions la convexité de la fonction $f(x) = 2\,x^4 - 3\,x^2 + 1$.
$f'(x) = 8\,x^3 - 6\,x$ et $f''(x) = 24\,x^2 - 6 = 6\,(4\,x^2 - 1) = 6\,(2\,x + 1)\,(2\,x - 1)$.

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
6	$+$		$+$		$+$
$2\,x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$2\,x-1$	$-$		$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$



$f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$: les points $(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{8})$ et $(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{8})$ sont des points d'inflexion.

6.10 Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3$
2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x}$
3) $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 9$
4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3}$

6.11 Étudier le signe, la croissance et la convexité des fonctions suivantes. Esquisser leur graphe.

1) $f(x) = \frac{1}{4}\,x^2 + x + 1$
2) $f(x) = -x^2 + x + 2$
3) $f(x) = x^3 - 3\,x$
4) $f(x) = 3\,x^4 + 4\,x^3$
5) $f(x) = -\frac{1}{9}\,(x^2 - 2\,x + 1)\,(2\,x + 7)$
6) $f(x) = \frac{1}{6}\,(2\,x^3 - 3\,x^2 - 12\,x + 18)$
7) $f(x) = -\frac{1}{4}\,(x^4 - 6\,x^2 + 8)$
8) $f(x) = 4\,x^3 - 3\,x + 1$
9) $f(x) = (x - 1)^3\,(x + 1)$
10) $f(x) = \frac{1}{8}\,(x^4 - 6\,x^3 + 12\,x^2)$

6.12 Déterminer les paramètres a, b, c tels que $f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2$ admette en $x = 1$ un point d'inflexion en lequel la tangente au graphe soit la droite d'équation $y = 16\,x - 5$.

Réponses

6.1
1) minimum absolu en 0
2) point critique en 0
3) maximum local en 0
minimum local en $\frac{2}{3}$

6.2 1) $c = 1$ 3) La tangente au graphe de f en c est parallèle à la corde AB.

6.5

1) $f'(x) = 2\,x + 5$

	$-\frac{5}{2}$	
$-$		$+$

$(-\frac{5}{2}\,;-\frac{21}{4})$ minimum

2) $f'(x) = 3\,x^2 + 3$

$+$

3) $f'(x) = x^2 + 5\,x + 6$

	-3		-2	
$+$		$-$		$+$

$(-3\,;-\frac{7}{2})$ maximum $(-2\,;-\frac{11}{3})$ minimum

4) $f'(x) = 8\,x^3 - 18\,x$

$-$	$-\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	$\frac{3}{2}$	$+$

$(-\frac{3}{2}\,;-\frac{81}{8})$ minimum $\quad (0\,;0)$ maximum $\quad (\frac{3}{2}\,;-\frac{81}{8})$ minimum

5) $f'(x) = \dfrac{-22}{(2\,x-3)^2}$

$-$	$\frac{3}{2}$ $\Vert$	$-$

6) $f'(x) = 3\,(x-1)^4\,(2\,x+1)^3\,(6\,x-1)$

$+$	$-\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{1}{6}$	$+$	1	$+$

$(-\frac{1}{2}\,;0)$ maximum $\quad (\frac{1}{6}\,;-\frac{25000}{19683})$ minimum $\quad (1\,;0)$ replat

7) $f'(x) = 5\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2$

$+$	0	$+$	1	$-$	3	$+$

$(0\,;1)$ replat $\quad (1\,;2)$ maximum $\quad (3\,;-26)$ mininum

8) $f'(x) = \dfrac{3\,x^4-3}{x^2}$

$+$	-1	$-$	0 $\Vert$	$-$	1	$+$

$(-1\,;-4)$ maximum $\quad (1\,;4)$ minimum

6.6 1) $4 \mid 0$ $\qquad$ 2) $3 \mid 0$

3) aucune $\mid \frac{1}{4}$ $\qquad$ 4) $256 \mid 0$

6.7 $\frac{1{,}000000000003}{1+1{,}000000000003^2}$

6.8 $k = -2$

6.10 1) $f''(x) = 6\,x$

$-$	0	$+$

$(0\,;0)$ point d'inflexion

2) $f''(x) = \dfrac{2\,(x^3-8)}{x^3}$

$+$	0 $\Vert$	$-$	2	$+$

$(2\,;0)$ point d'inflexion

3) $f''(x) = 6\,x - 6$

$-$	1	$+$

$(1\,;-2)$ point d'inflexion

4) $f''(x) = \dfrac{2\,x^3-18\,x}{(x^2+3)^3}$

$-$	-3	$+$	0	$-$	3	$+$

$(-3\,;-\frac{1}{4})$, $(0\,;0)$ et $(3\,;\frac{1}{4})$ points d'inflexion

6.11 1) $f(x) = \frac{1}{4}\,(x+2)^2$

$+$	-2	$+$

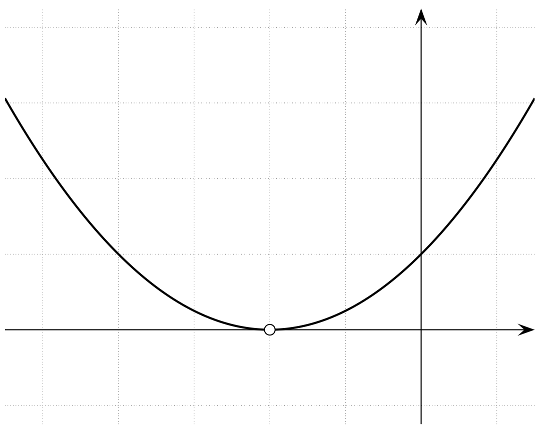
$f'(x) = \frac{1}{2}\,(x+2)$

$-$	-2	$+$

$(-2\,;0)$ minimum

$f''(x) = \frac{1}{2}$

$+$



2) $f(x) = -(x+1)\,(x-2)$

$-$	-1	$+$	2	$-$

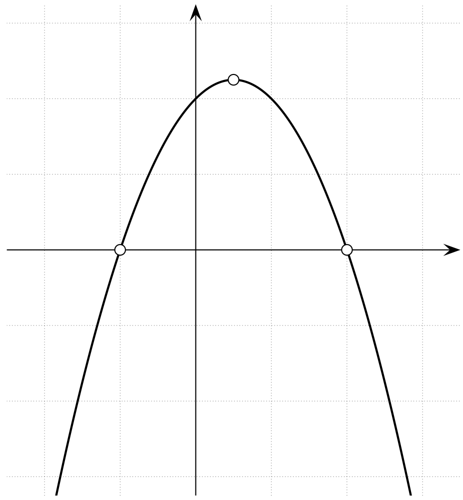
$f'(x) = -2\,x + 1$

$+$	$\frac{1}{2}$	$-$

$(\frac{1}{2}\,;\frac{9}{4})$ maximum

$f''(x) = -2$

$-$



3) $f(x) = x\,(x^2 - 3)$

$-$	$-\sqrt{3}$	$+$	0	$-$	$\sqrt{3}$	$+$

$f'(x) = 3\,(x+1)\,(x-1)$

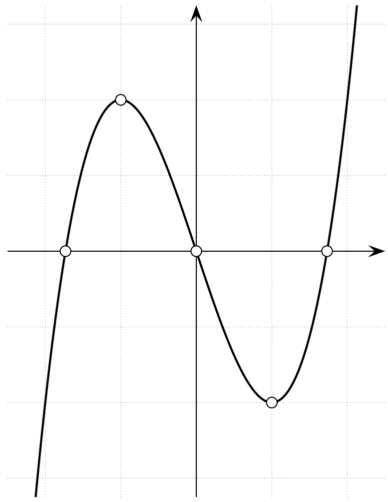
$+$	-1	$-$	1	$+$

$(-1\,;2)$ maximum
$(1\,;-2)$ minimum

$f''(x) = 6\,x$

$-$	0	$+$

$(0\,;0)$ point d'inflexion



4) $f(x) = x^3\,(3\,x+4)$

$+$	$-\frac{4}{3}$	$-$	0	$+$

$f'(x) = 12\,x^2\,(x+1)$

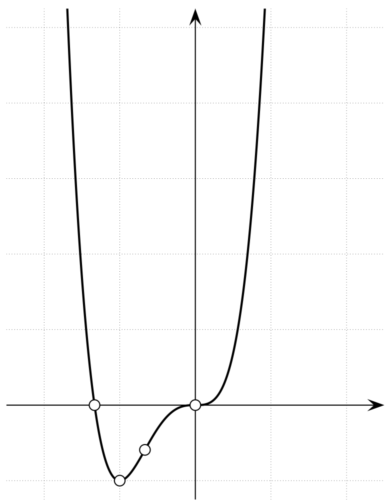
$-$	-1	$+$	0	$+$

$(-1\,;-1)$ minimum
$(0\,;0)$ tangente horizontale

$f''(x) = 12\,x\,(3\,x+2)$

$+$	$-\frac{2}{3}$	$-$	0	$+$

$(-\frac{2}{3}\,;-\frac{16}{27})$ et $(0\,;0)$ points d'inflexion



5) $f(x) = -\frac{1}{9}\,(x-1)^2\,(2\,x+7)$

	$-\frac{7}{2}$		1	
$+$	|	$-$	|	$-$

$f'(x) = -\frac{2}{3}\,(x+2)\,(x-1)$

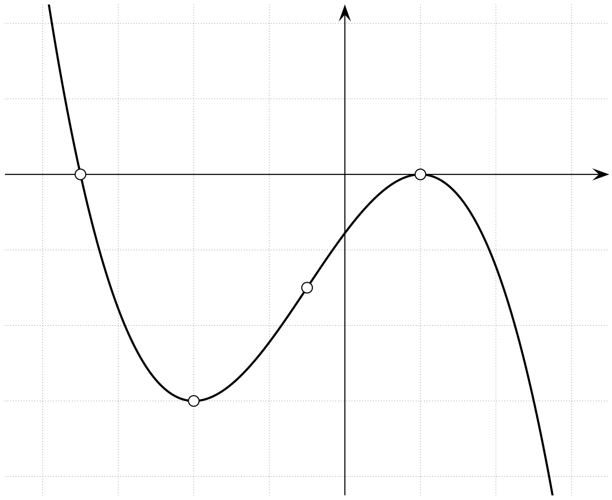
	-2		1	
$-$	|	$+$	|	$-$

$(-2\,;-3)$ minimum
$(1\,;0)$ maximum

$f''(x) = -\frac{2}{3}\,(2\,x+1)$

	$-\frac{1}{2}$	
$+$	|	$-$

$(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2})$ point d'inflexion



6) $f(x) = \frac{1}{6}\,(2\,x-3)\,(x^2-6)$

	$-\sqrt{6}$		$\frac{3}{2}$		$\sqrt{6}$	
$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

$f'(x) = (x+1)\,(x-2)$

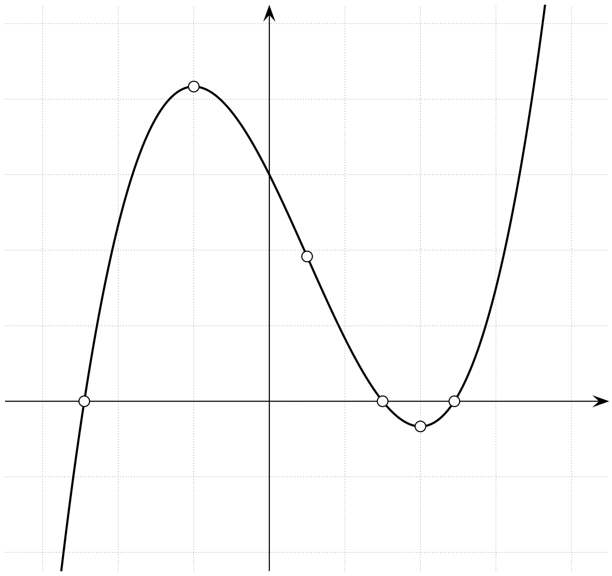
	-1		2	
$+$	|	$-$	|	$+$

$(-1\,;\frac{25}{6})$ maximum
$(2\,;-\frac{1}{3})$ minimum

$f''(x) = 2\,x-1$

	$\frac{1}{2}$	
$-$	|	$+$

$(\frac{1}{2}\,;\frac{23}{12})$ point d'inflexion



7) $f(x) = -\frac{1}{4}\,(x-2)\,(x+2)\,(x^2-2)$

	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	
$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$

$f'(x) = x\,(3-x^2)$

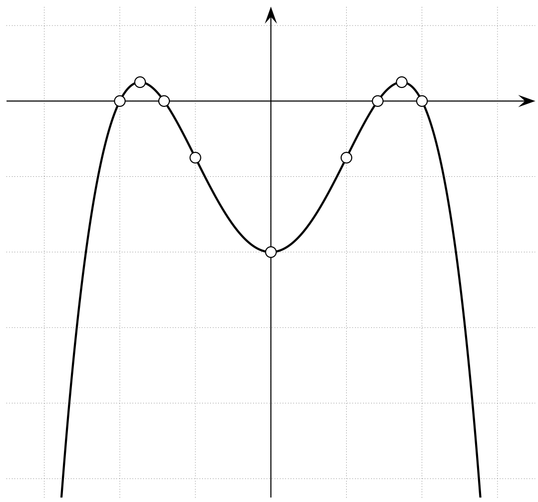
	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$+$	|	$-$	|	$+$	|	$-$

$(-\sqrt{3}\,;\frac{1}{4})$ et $(\sqrt{3}\,;\frac{1}{4})$ maxima
$(0\,;-2)$ minimum

$f''(x) = 3\,(1+x)\,(1-x)$

	-1		1	
$-$	|	$+$	|	$-$

$(-1\,;-\frac{3}{4})$ et $(1\,;-\frac{3}{4})$ points d'inflexion



8) $f(x) = (x+1)\,(2\,x-1)^2$

	-1		$\frac{1}{2}$	
$-$		$+$		$+$

$f'(x) = 3\,(2\,x+1)\,(2\,x-1)$

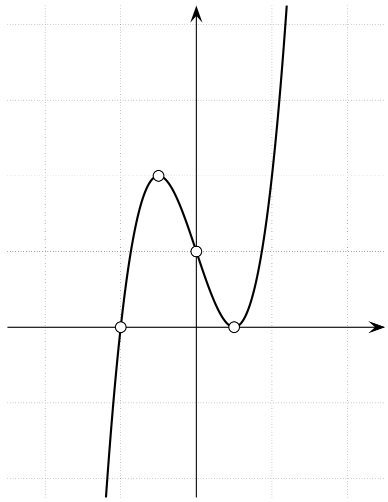
	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$+$		$-$		$+$

$(-\frac{1}{2}\,;2)$ maximum ; $(\frac{1}{2}\,;0)$ minimum

$f''(x) = 24\,x$

	0	
$-$		$+$

$(0\,;1)$ point d'inflexion



9) $f(x) = (x-1)^3\,(x+1)$

	-1		1	
$+$		$-$		$+$

$f'(x) = 2\,(x-1)^2\,(2\,x+1)$

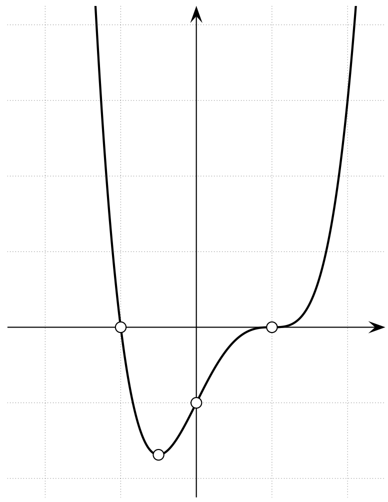
	$-\frac{1}{2}$		1	
$-$		$+$		$+$

$(-\frac{1}{2}\,;-\frac{27}{16})$ minimum
$(1\,;0)$ tangente horizontale

$f''(x) = 12\,x\,(x-1)$

	0		1	
$+$		$-$		$+$

$(0\,;-1)$ et $(1\,;0)$ points d'inflexion



10) $f(x) = \frac{1}{8}\,x^2\,(x^2-6\,x+12)$

	0	
$+$		$+$

$f'(x) = \frac{1}{4}\,x\,(2\,x^2-9\,x+12)$

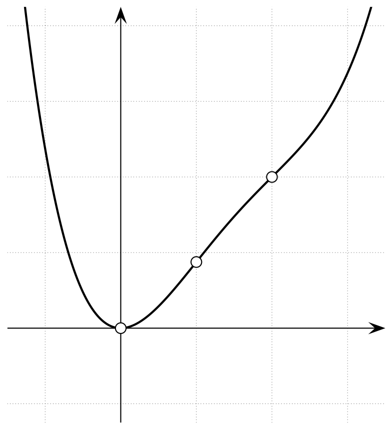
	0	
$-$		$+$

$(0\,;0)$ minimum

$f''(x) = \frac{3}{2}\,(x-1)\,(x-2)$

	1		2	
$+$		$-$		$+$

$(1\,;\frac{7}{8})$ et $(2\,;2)$ points d'inflexion



6.12 $f(x) = x^4 - 8\,x^3 + 18\,x^2$