6.3 1) Supposons que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Soient $x_1 \in \mathrm{I}$ et $x_2 \in \mathrm{I}$ avec $x_1 < x_2$.
Il faut montrer que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, à savoir que $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$.

Vu le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1\,;x_2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

On en conclut $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geqslant 0}\,\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geqslant 0\,.$

2) Supposons f croissante sur I.

Soit $x \in \mathrm{I}$.
Soit $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que $x + h \in \mathrm{I}$.

(a) Supposons $h > 0$.
$x + h > x$ entraîne $f(x+h) \geqslant f(x)$, vu la croissance de f.
Il en résulte que $\dfrac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geqslant 0$.

(b) Supposons $h < 0$.
$x + h < x$ implique $f(x+h) \leqslant f(x)$, vu la croissance de f.
Il en suit que $\dfrac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geqslant 0$.

On en tire que $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.