6.9 Soient $x, a \in \mathrm{I}$.

1) Supposons $x = a$.
   $f(a) + (x-a)\,f'(a) = f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a) = f(x) \geqslant f(x)$.
2) Supposons $x > a$.
   Le théorème des accroissements finis garantit l'existence de $c \in \,]a\,;x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
   Par hypothèse, $f'' < 0$ sur I, si bien que la fonction f' est décroissante sur I. Ainsi $c > a$ implique $f'(c) \leqslant f'(a)$.
   On obtient donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(a)$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\,f'(a)$.
3) Supposons $x < a$.
   De même, il existe $c \in \,]x\,;a[$ tel que $f'(c) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$.
   Comme f' est décroissante sur I, $c < a$ implique $f'(c) \geqslant f'(a)$. Par conséquent $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \geqslant f'(a)$, ce qui donne $f(a) - f(x) \geqslant (a-x)\,f'(a)$, puis en multipliant par -1 : $f(x) - f(a) \leqslant (x-a)\,f'(a)$. On conclut finalement que $f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\,f'(a)$.