7.9 On factorise facilement la clé publique : $n = 55 = 5 \cdot 11$.
Par conséquent, $\varphi(n) = (5-1)\,(11-1) = 40$.

L'exposant de décryptage d satisfait la congruence $7\,d \equiv 1 \mod 40$.
Afin d'obtenir d, résolvons l'équation diophantienne $7\,x + 40\,y = 1$:

$$\begin{array}{rcl} 40 = 7 \cdot 5 + 5 & \Longrightarrow & 5 = 40 - 7 \cdot 5 \\ 7 = 5 \cdot 1 + 2 & \Longrightarrow & 2 = 7 - 5 \cdot 1 \\ 5 = 2 \cdot 2 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 = 1 \cdot 2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2 = 7 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ &= 7 \cdot (-2) + (40 - 7 \cdot 5) \cdot 3 = 40 \cdot 3 + 7 \cdot (-17) \end{aligned}$$

À partir de la solution particulière $x_0 = -17$ et $y_0 = 3$, on déduit la solution générale :

$$\begin{cases} x = -17 + \frac{40}{1}\,k = -17 + 40\,k \\ y = 3 - \frac{7}{1}\,k = 3 - 7\,k \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

La condition $1 < x < \varphi(n) = 40$ implique $k = 1$.
On conclut que $d = -17 + 40 = 23$.

Pour décrypter le code 25, il faut calculer $25^{23} \mod 55$:

x	reste r	n	$25^{2^n} \mod 55$	contribution (si $r = 1$)
23	1	0	25	25
11	1	1	$25^2 \equiv 20$	20
5	1	2	$20^2 \equiv 15$	15
2	0	3	$15^2 \equiv 5$	
1	1	4	$5^2 \equiv 25$	25

$25^{23} \equiv 25 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 25 \equiv 5 \mod 55$

On conclut que notre moyenne envoyée au secrétariat est 5.