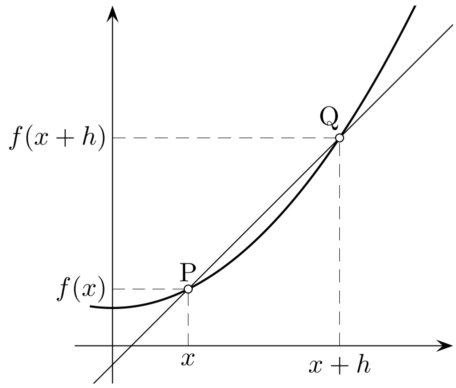
5 Dérivées

Soient f une fonction et $\mathrm{P}\big(x\,;f(x)\big)$ un point du graphe de f.

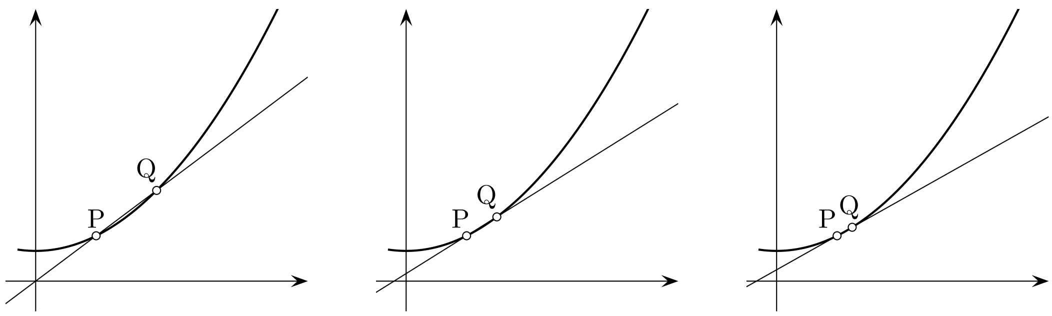
On appelle **dérivée** de f en x, que l'on note $f'(x)$, la pente de la tangente au graphe de f au point $\mathrm{P}\big(x\,;f(x)\big)$, pour autant qu'elle existe.

Soit $\mathrm{Q}\big(x+h\,;f(x+h)\big)$ un point du graphe de f au voisinage du point P.



Étant donné que $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} (x+h)-x \\ f(x+h)-f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ f(x+h)-f(x) \end{pmatrix}$, la pente de la droite PQ vaut $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Plus le point Q se rapproche du point P, plus la droite PQ se rapproche de la tangente au graphe de f au point P.



Par conséquent, la dérivée de la fonction f au point $\mathrm{P}\big(x\,;f(x)\big)$ est donnée par la formule $\boxed{f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ pour autant que cette limite existe.

Si tel est le cas, on dit que la fonction f est **dérivable** en x.

5.1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x$ 2) $f(x) = x^2$ 3) $f(x) = x^3$

4) $f(x) = x^4$ 5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 6) $f(x) = \sqrt{x}$

5.2 Soit $f(x) = |x|$.

1) Représenter le graphe de la fonction f.
2) Que vaut $f'(x)$ lorsque $x > 0$?
3) Que vaut $f'(x)$ lorsque $x < 0$?
4) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Proposition *Si une fonction f est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

Preuve Il faut prouver que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$.
En posant $x = a + h$, cette condition équivaut à $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = 0$.

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} h}_{0} = 0$$

5.3 Si une fonction est continue en a, est-elle dérivable en a ?

5.4 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f(x) = a$.

1) Montrer que $f'(x) = 0$.
2) Interpréter graphiquement ce résultat.

5.5 Soient f une fonction dérivable et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\boxed{\big(\lambda\, f\big)'(x) = \lambda\, f'(x)}$.

5.6 Soient f et g deux fonctions dérivables. Montrer que $\boxed{\big(f + g\big)'(x) = f'(x) + g'(x)}$.

Proposition *Soient f et g deux fonctions dérivables.*
Alors $\boxed{\big(f \cdot g\big)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}$.

Preuve $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\big(f \cdot g\big)(x+h) - \big(f \cdot g\big)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)\, g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\, \big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)\, g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\, \big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \left(\lim_{h \to 0} g(x+h)\right) + \left(\lim_{h \to 0} f(x)\right) \left(\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) =$$

$$f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

5.7 Montrer par récurrence que $\boxed{(x^n)' = n\, x^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.8 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4\,x^2 - 5\,x + 6$
2) $f(x) = 2\,x^3 + 2\,x + 1$
3) $f(x) = x^2 + 5\,x + 1$
4) $f(x) = x^5 - 3\,x^2 + 1$

5) $f(x) = 3\,x^2 - 6\,x - 12$ 6) $f(x) = 4\,x^3 + 2\,x - 1$

7) $f(x) = 2\,x^5 + 5\,x^4 - 8$ 8) $f(x) = 4\,x^3 + 7\,x^2 - 8\,x + 5$

9) $f(x) = 8\,x^{10} - 5\,x^6 - 20\,x^3$ 10) $f(x) = \frac{1}{3}\,x^4 - \sqrt{2}$

11) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5\,x^2}{2} + 6\,x + 1$ 12) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \sqrt{5}\,x - \dfrac{\pi}{3}$

5.9 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x+5)\,(x-3)$ 2) $f(x) = (3\,x^2+5)\,(x^2-1)$

3) $f(x) = (x^2-3)\,(4\,x-5)$ 4) $f(x) = (3\,x^2-7\,x)\,(4\,x^2-5)$

5) $f(x) = (x-7)\,(3\,x+2)\,(4\,x^2-3)$ 6) $f(x) = (2\,x^2+3\,x)\,(3\,x^3-x+4)$

Proposition *Soient f et g deux fonctions dérivables.*
Alors $\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$.

Preuve $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\big(g\circ f\big)(x+h) - \big(g\circ f\big)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)}\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) =$$

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)}\right) \cdot f'(x)$$

Il reste encore à montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)} = g'\big(f(x)\big)$.

Posons $h^\star = f(x+h) - f(x)$. D'une part $f(x+h) = f(x) + h^\star$ et d'autre part $\displaystyle\lim_{h\to 0} h^\star = \lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$, car $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ par continuité de f.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)} = \lim_{h^\star\to 0} \frac{g\big(f(x)+h^\star\big) - g\big(f(x)\big)}{h^\star} = g'\big(f(x)\big)$$

5.10 Soit f une fonction dérivable. En posant $g(x) = \frac{1}{x}$ et à l'aide de la proposition précédente et de l'exercice 5.5 5), montrer que $\boxed{\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}}$.

5.11 Soient f et g deux fonctions dérivables.
Montrer que $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}}$.

5.12 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$ 2) $f(x) = \dfrac{2\,x+3}{4-x}$

3) $f(x) = \dfrac{x-x^3}{2-x}$ 4) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2-x}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{4-x}$ 6) $f(x) = \dfrac{x-7}{x^2-3}$

7) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x+7}$ 8) $f(x) = \dfrac{4-x^3}{x-5}$

5.13 On rappelle que $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\boxed{(x^n)' = n\,x^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en recourant aux exercices 5.10 et 5.7.

5.14 Soit f une fonction dérivable. Montrer que $\boxed{\big(f^n(x)\big)' = n\,f^{n-1}(x)\cdot f'(x)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5.15 On rappelle que $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ quels que soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
En calculant $\big((x^{\frac{p}{q}})^q\big)'$, montrer que $\boxed{(x^n)' = n\,x^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{Q}$.

5.16 Généraliser le résultat de l'exercice 5.14.

5.17 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = (2\,x^2+3\,x+4)^3$ 2) $f(x) = (x^2+5\,x-1)^5$

3) $f(x) = (x^2+1)^7$ 4) $f(x) = (3-x)^5$

5) $f(x) = (2\,x^2-3)^2$ 6) $f(x) = (5\,x+1)^4$

5.18 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = (3\,x^2-x-1)\,(2\,x-3)^3$ 2) $f(x) = (x+2)^3\,(x-3)^4$

3) $f(x) = (2+x)^2\,(1-x)^3$ 4) $f(x) = (2\,x+1)^2\,(1-3\,x)^3$

5) $f(x) = (x+5)^2\,(x-1)\,(2\,x+3)^3$ 6) $f(x) = (1-3\,x)^2\,(2-x)\,(x+3)^3$

5.19 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 2) $f(x) = \dfrac{(3\,x-1)^3}{(2\,x+3)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{(x-4)\,(3\,x-7)}{x^2-4\,x+2}$ 4) $f(x) = \dfrac{(x-5)\,(3-2\,x)}{4\,x+2}$

5) $f(x) = 3\,x-2-\dfrac{1}{3\,x-2}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$

5.20 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x) = \dfrac{7}{x^5}$ 3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 5) $f(x) = \sqrt{x^3}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

5.21 Dériver les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{5\,x^2 - 2\,x + 1}$ 2) $f(x) = \sqrt{(3\,x^2 + 1)^3}$

3) $f(x) = \sqrt{(x+1)\,(2-3\,x)}$ 4) $f(x) = (1-x)\,\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-2\,x}{3\,x+2}}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$ 8) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Équation de la tangente au graphe de f en x_0

Par définition de la dérivée, la pente de la tangente au graphe d'une fonction f en x_0 vaut $f'(x_0)$. L'équation de cette tangente s'écrit ainsi $y = f'(x_0)\,x + h$.
Par ailleurs, cette tangente doit passer par le point $\big(x_0\,;f(x_0)\big)$. On obtient donc $f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + h$, de sorte que $h = -f'(x_0)\,x_0 + f(x_0)$.
On conclut que l'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est donnée par la formule $\boxed{y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)}$.

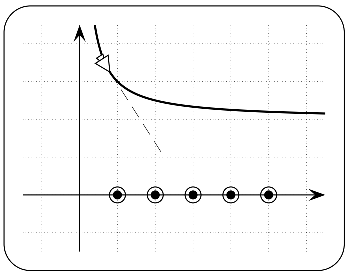
5.22 Former l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse x_0 ; esquisser le graphe ainsi que la tangente.

1) $f(x) = x^3$ $\quad x_0 = 1$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad x_0 = -2$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 4$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad x_0 = 1$

5) $f(x) = 3\,x + 2$ $\quad x_0 = -1$ 6) $f(x) = \sqrt{-2\,x+1}$ $\quad x_0 = 0$

5.23 Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure, on peut voir un avion qui descend de gauche à droite en suivant la trajectoire d'équation $y = 2 + \frac{1}{x}$ et qui tire des missiles selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe Ox aux abscisses 1, 2, 3, 4 et 5.
Une cible sera-t-elle touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en :



1) P$(1\,;3)$ 2) Q$(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3})$

3) Quelle doit être la position de l'avion pour toucher la première cible ?

5.24 Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 5\,x + 2$ est parallèle à la droite passant par A$(-3\,;2)$ et B$(1\,;14)$.

5.25 Déterminer les tangentes à la courbe $y = x^2$ issues du point P$(5\,;9)$.

5.26 On définit l'angle entre deux courbes comme l'angle aigu des tangentes aux courbes en leur(s) point(s) d'intersection.
Déterminer l'angle entre les deux courbes en leur(s) point(s) d'intersection :

1) $y = x^2$ $\qquad$ $y = x^3$
2) $y = x^2$ $\qquad$ $4\,y = x^2 + 12$
3) $x^2 = 4\,y$ $\qquad$ $y = -x^2 + 10\,x - 15$
4) $y = x^3 - 4\,x$ $\qquad$ $y = x^3 - 2\,x^2$

5.27 Calculer k de telle sorte que la courbe $y = x^3 - 12\,x + k$ soit tangente à l'axe Ox.

5.28 On donne la fonction $f(x) = \dfrac{a\,x - 2}{8 - b\,x}$.
Calculer a et b de telle manière que le graphe de f passe par le point $(1\,;\frac{1}{3})$ et que la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 2 ait une pente égale à $\frac{7}{2}$.

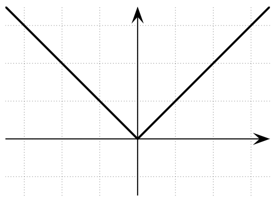
5.29 Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels les courbes $y = x^2 - 6\,x$ et $y = x^3 + a\,x^2 + b\,x$ sont tangentes en un point d'abscisse 4.

Réponses

5.1 1) $f'(x) = 1$ 2) $f'(x) = 2\,x$ 3) $f'(x) = 3\,x^2$

4) $f'(x) = 4\,x^3$ 5) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ 6) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5.2 1)



2) $f'(x) = 1$ si $x > 0$

3) $f'(x) = -1$ si $x < 0$

4) non

5.3 non

5.8 1) $f'(x) = 8\,x - 5$ 2) $f'(x) = 6\,x^2 + 2$

3) $f'(x) = 2\,x + 5$ 4) $f'(x) = 5\,x^4 - 6\,x$

5) $f'(x) = 6\,x - 6$ 6) $f'(x) = 12\,x^2 + 2$

7) $f'(x) = 10\,x^4 + 20\,x^3$ 8) $f'(x) = 12\,x^2 + 14\,x - 8$

9) $f'(x) = 80\,x^9 - 30\,x^5 - 60\,x^2$ 10) $f'(x) = \frac{4}{3}\,x^3$

11) $f'(x) = x^2 + 5\,x + 6$ 12) $f'(x) = \dfrac{x}{2} + \sqrt{5}$

5.9 1) $f'(x) = 2\,x + 2$ 2) $f'(x) = 12\,x^3 + 4\,x$

3) $f'(x) = 12\,x^2 - 10\,x - 12$ 4) $f'(x) = 48\,x^3 - 84\,x^2 - 30\,x + 35$

5) $f'(x) = 48\,x^3 - 228\,x^2 - 130\,x + 57$ 6) $f'(x) = 30\,x^4 + 36\,x^3 - 6\,x^2 + 10\,x + 12$

5.12 1) $f'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$ 2) $f'(x) = \dfrac{11}{(4-x)^2}$

3) $f'(x) = \dfrac{2\,x^3 - 6\,x^2 + 2}{(2-x)^2}$ 4) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4\,x + 4}{(2-x)^2}$

5) $f'(x) = \dfrac{-2\,x^3 + 13\,x^2 - 8\,x}{(4-x)^2}$ 6) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 14\,x - 3}{(x^2-3)^2}$

7) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 14\,x - 4}{(x+7)^2}$ 8) $f'(x) = \dfrac{-2\,x^3 + 15\,x^2 - 4}{(x-5)^2}$

5.16 $\big(f^n(x)\big)' = n\,f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Q}$.

5.17 1) $f'(x) = 3\,(2\,x^2 + 3\,x + 4)^2\,(4\,x + 3)$ 2) $f'(x) = 5\,(x^2 + 5\,x - 1)^4\,(2\,x + 5)$

3) $f'(x) = 14\,x\,(x^2 + 1)^6$ 4) $f'(x) = -5\,(3 - x)^4$

5) $f(x) = 8\,x\,(2\,x^2 - 3)$ 6) $f(x) = 20\,(5\,x + 1)^3$

5.18 1) $f'(x) = (2\,x - 3)^2\,(30\,x^2 - 26\,x - 3)$ 2) $f'(x) = (x + 2)^2\,(x - 3)^3\,(7\,x - 1)$

3) $f'(x) = (2+x)\,(1-x)^2\,(-5\,x-4)$ 4) $f'(x) = -5\,(6\,x+1)\,(2\,x+1)\,(1-3\,x)^2$

5) $f'(x) = 3\,(x+5)\,(2\,x+3)^2\,(4\,x^2+13\,x-7)$

6) $f'(x) = (1-3\,x)\,(x+3)^2\,(18\,x^2-7\,x-33)$

5.19 1) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2\,(x+5)}{(x+1)^3}$ 2) $f'(x) = \dfrac{(3\,x-1)^2\,(6\,x+31)}{(2\,x+3)^3}$

3) $f'(x) = \dfrac{7\,x^2-44\,x+74}{(x^2-4\,x+2)^2}$ 4) $f'(x) = \dfrac{-4\,x^2-4\,x+43}{2\,(2\,x+1)^2}$

5) $f'(x) = \dfrac{3\,(9\,x^2-12\,x+5)}{(3\,x-2)^2}$ 6) $f'(x) = \dfrac{-4\,x\,(x^2+12)}{(x-2)^3\,(x+2)^3}$

5.20 1) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$ 2) $f'(x) = -\dfrac{35}{x^6}$ 3) $f'(x) = \dfrac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}$

4) $f'(x) = \dfrac{2}{3\,\sqrt[3]{x}}$ 5) $f'(x) = \dfrac{3\,\sqrt{x}}{2}$ 6) $f'(x) = -\dfrac{1}{4\,\sqrt[4]{x^5}}$

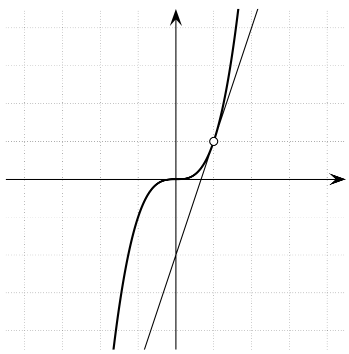
5.21 1) $f'(x) = \dfrac{5\,x-1}{\sqrt{5\,x^2-2\,x+1}}$ 2) $f'(x) = 9\,x\,\sqrt{3\,x^2+1}$

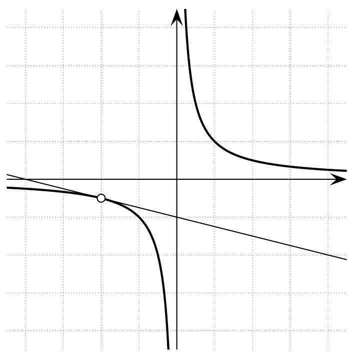
3) $f'(x) = \dfrac{-6\,x-1}{2\,\sqrt{(x+1)\,(2-3\,x)}}$ 4) $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,(2\,x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\,\sqrt{1+x^2}}$ 6) $f'(x) = \dfrac{-7}{2\,(3\,x+2)^2}\,\sqrt{\dfrac{3\,x+2}{1-2\,x}}$

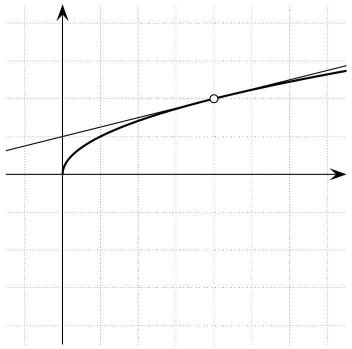
7) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}\,\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$ 8) $f'(x) = \dfrac{2\,\sqrt{x}+1}{4\,\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

5.22 1) $y = 3\,x-2$ 2) $y = -\frac{1}{4}\,x-1$

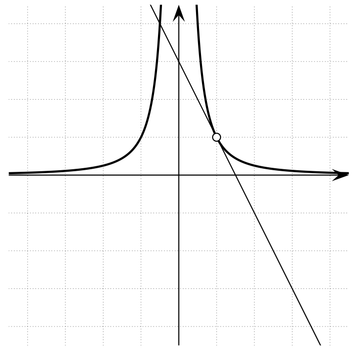




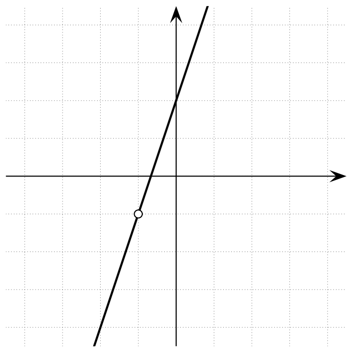
3) $y = \frac{1}{4}\,x + 1$



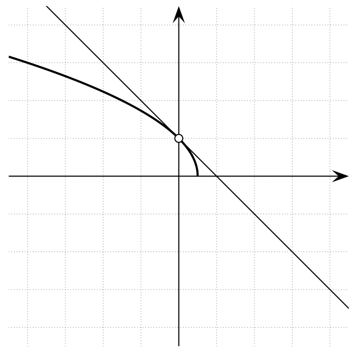
4) $y = -2\,x + 3$



5) $y = 3\,x + 2$



6) $y = -x + 1$



5.23 1) oui : cible n° 4 2) non 3) $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\,; 3 + \sqrt{3})$

5.24 $-\frac{4}{3}$ ou 2

5.25 $y = 2\,x - 1$ et $y = 18\,x - 81$

5.26 1) 0° au point $(0\,;0)$ $8,13^\circ$ au point $(1\,;1)$

2) $30,96^\circ$ aux points $(-2\,;4)$ et $(2\,;4)$

3) $35,54^\circ$ au point $(2\,;1)$ 45° au point $(6\,;9)$

4) $75,96^\circ$ au point $(0\,;0)$ $6,91^\circ$ au point $(2\,;0)$

5.27 $k = \pm 16$

5.28 $a = 3$ $b = 5$ ou $a = \frac{34}{9}$ $b = \frac{8}{3}$

5.29 $a = -7$ $b = 10$