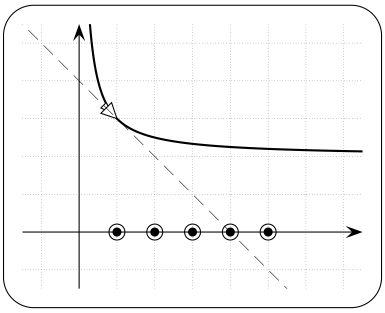
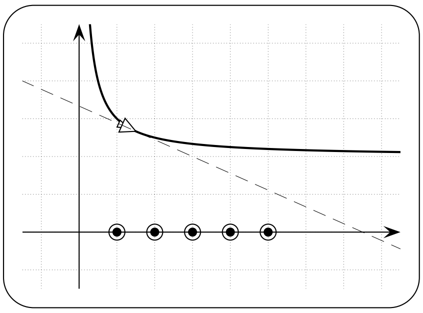
5.23 Posons $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$f'(x) = (2 + x^{-1})' = 0 + -1\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

1) $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
   On vérifie que $f(1) = 2 + \frac{1}{1} = 3$.
   La tangente au graphe de f au point P$(1\,;3)$ est donc $y = -1\,(x-1) + 3$ ou encore $y = -x + 4$.
   Cette tangente coupe l'axe horizontal (d'équation $y = 0$) lorsque $0 = -x + 4$, c'est-à-dire lorsque $x = 4$.
   En d'autres termes, la cible n° 4 sera touchée si le joueur tire au moment où l'avion est en P$(1\,;3)$.



2) $f'(\frac{3}{2}) = -\dfrac{1}{(\frac{3}{2})^2} = -\dfrac{1}{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{9}$
   On vérifie que $f(\frac{3}{2}) = 2 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.
   La tangente au graphe de f au point Q$(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3})$ est ainsi $y = -\frac{4}{9}\,(x - \frac{3}{2}) + \frac{8}{3}$, à savoir $y = -\frac{4}{9}\,x + \frac{10}{3}$.
   Cette tangente coupe l'axe horizontal si $0 = -\frac{4}{9}\,x + \frac{10}{3}$, d'où suit $x = \frac{15}{2}$.
   Par conséquent, si le joueur tire au moment où l'avion est en Q$(\frac{3}{2}\,;\frac{8}{3})$, il n'atteindra aucune cible.



3) L'équation de la tangente en x_0 est donnée par :
   $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$
   $y = -\frac{1}{x_0^2}\,(x - x_0) + 2 + \frac{1}{x_0}$

Les coordonnées de la première cible $(1\,;0)$ doivent vérifier cette équation :
$0 = -\frac{1}{x_0^2}\,(1 - x_0) + 2 + \frac{1}{x_0}$
$0 = \dfrac{-1 + x_0 + 2\,x_0^2 + x_0}{x_0^2} = \dfrac{2\,x_0^2 + 2\,x_0 - 1}{x_0^2}$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 12$

Il s'ensuit que les solutions algébriques de cette équation sont
$x_0 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2\cdot 2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x_0 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\cdot 2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

Étant donné que x_0 doit être positif, on ne retient que la première solution.

$$f(x_0) = f(\tfrac{-1+\sqrt{3}}{2}) = 2 + \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}} = 2 + \tfrac{2}{-1+\sqrt{3}} = 2 + \tfrac{2\,(1+\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})}$$
$$= 2 + \tfrac{2\,(1+\sqrt{3})}{-1+3} = 2 + \tfrac{2\,(1+\sqrt{3})}{2} = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$$

On conclut que l'avion doit se situer au point $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\,; 3+\sqrt{3})$ pour toucher la première cible.