5.28 Pour que le graphe de f passe par le point $(1\,;\frac{1}{3})$, on doit avoir

$$\frac{1}{3} = f(1) = \frac{a \cdot 1 - 2}{8 - b \cdot 1} = \frac{a-2}{8-b}$$

c'est-à-dire $1\,(8-b) = 3\,(a-2)$ ou encore $\boxed{3\,a + b = 14}$

$$f'(x) = \frac{(a\,x-2)'\,(8-b\,x) - (a\,x-2)\,(8-b\,x)'}{(8-b\,x)^2} = \frac{a\,(8-b\,x) - (a\,x-2)\,(-b)}{(8-b\,x)^2}$$

$$= \frac{8\,a - a\,b\,x + a\,b\,x - 2\,b}{(8-b\,x)^2} = \frac{8\,a - 2\,b}{(8-b\,x)^2}$$

La pente de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 2 vaut $\frac{7}{2}$:

$$\frac{7}{2} = f'(2) = \frac{8\,a-2\,b}{(8-2\,b)^2} = \frac{2\,(4\,a-b)}{\big(2\,(4-b)\big)^2} = \frac{4\,a-b}{2\,(4-b)^2}$$

On en tire $4\,a - b = 7\,(4-b)^2$ puis $\boxed{7\,b^2 - 55\,b - 4\,a + 112 = 0}$

La première équation donne $b = 14 - 3\,a$ que l'on substitue dans la seconde :

$7\,(14-3\,a)^2 - 55\,(14-3\,a) - 4\,a + 112 = 0$

$1372 - 588\,a + 63\,a^2 - 770 + 165\,a - 4\,a + 112 = 0$

$63\,a^2 - 427\,a + 714 = 0$

$9\,a^2 - 61\,a + 102 = 0$

$\Delta = (-61)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 102 = 49$

1) $a_1 = \frac{-(-61)-\sqrt{49}}{2\cdot 9} = 3$ et $b_1 = 14 - 3\,a_1 = 14 - 3 \cdot 3 = 5$

2) $a_2 = \frac{-(-61)+\sqrt{49}}{2\cdot 9} = \frac{34}{9}$ et $b_2 = 14 - 3\,a_2 = 14 - 3 \cdot \frac{34}{9} = \frac{8}{3}$