7 Développement en série d'une fonction

Il est facile d'évaluer un polynôme en un point, car un tel calcul ne fait appel qu'aux opérations de base : addition et multiplication.

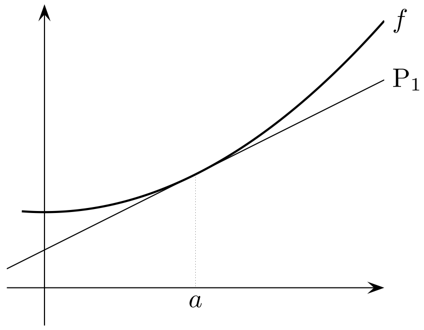
Mais, comment faut-il faire pour évaluer une fonction comme le sinus ou le logarithme ? Plus précisément, comment opère la machine à calculer ?

La solution consiste à approximer une telle fonction par un polynôme adéquat.

Polynôme de Taylor

Considérons une fonction f que l'on souhaite approximer au voisinage de a par un polynôme.

Remarquons que la tangente au graphe de f au point a constitue une approximation de f par le polynôme du premier degré $\mathrm{P}_1(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$:



Le polynôme P_1 fournit une première approximation de f au voisinage de a, du fait qu'il vérifie les propriétés :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_1(a) &= f(a) \\ \mathrm{P}_1'(a) &= f'(a) \end{cases}$$

Généralisons avec $\mathrm{P}_n(x) = c_0 + c_1\,(x-a) + c_2\,(x-a)^2 + c_3\,(x-a)^3 + \ldots + c_n\,(x-a)^n$ un polynôme de degré n dont on souhaite qu'il vérifie les propriétés :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_n(a) &= f(a) \\ \mathrm{P}_n'(a) &= f'(a) \\ \mathrm{P}_n''(a) &= f''(a) \\ \mathrm{P}_n^{(3)}(a) &= f^{(3)}(a) \\ & \vdots \\ \mathrm{P}_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{cases}$$

7.1 Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont donnés par :

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ c_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!},\ \ldots,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\mathrm{P}_n(x) \;=\; f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

s'appelle le *polynôme de Taylor de degré* n *de la fonction* f *en* a.

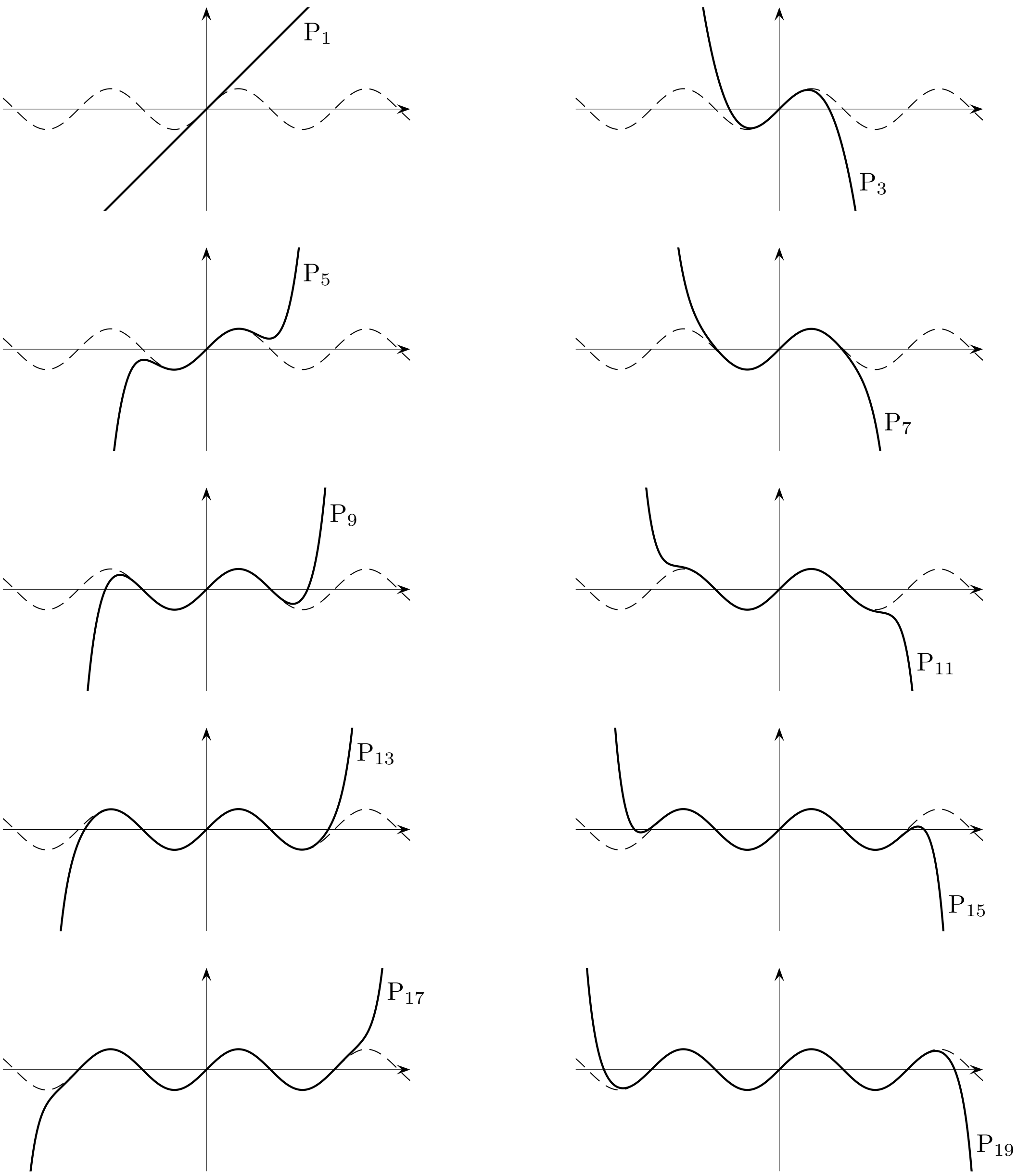
7.2 Calculer le polynôme de Taylor de la fonction $f(x) = \sin(x)$ en $a = 0$

1) de degré 1 2) de degré 2 3) de degré 3 4) de degré 4

5) de degré 5 6) de degré 7 7) de degré $2\,n+1$

L'approximation d'une fonction f au voisinage de a par un polynôme de Taylor est d'autant meilleure que le degré du polynôme est élevé.

C'est ce qu'illustrent les graphes de quelques polynômes de Taylor pour approximer la fonction $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de 0 :



7.3 Calculer le polynôme de Taylor de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en $a = 0$

1) de degré 1 2) de degré 2 3) de degré 3 4) de degré 4

5) de degré 5 6) de degré 6 7) de degré $2\,n$

7.4 Résoudre dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ en utilisant

1) $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!}$ 2) $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$

et comparer avec la valeur exacte.

Estimation de l'erreur

La méthode des polynômes de Taylor permet non seulement d'approximer une fonction f au voisinage d'un point a, mais surtout — et c'est là tout son intérêt — d'estimer l'erreur commise par une telle approximation.

Formule de Taylor

Soit f une fonction $n+1$ fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert I contenant a. Pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}\,(x-a)^n + \mathrm{R}_n(x)$$

avec $\mathrm{R}_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$ *où c est compris entre a et x.*

Corollaire $\left|\mathrm{R}_n(x)\right| \leqslant \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup\limits_{t\in \mathrm{I}}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$

Preuve La démonstration repose sur le théorème de Rolle que l'on rappelle : *Soit g une fonction dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ telle que $g(a) = g(b)$. Alors il existe un nombre c dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$.*

Posons $g(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(t-a)^{n+1}$.

Vu que $g(a) = g(x) = 0$, le théorème de Rolle garantit l'existence de c_1, compris entre a et x, tel que $g'(c_1) = 0$.

Or $g'(a) = f'(a) - \mathrm{P}'_n(a) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)\,(a-a)^n = 0$. À nouveau, le théorème de Rolle affirme l'existence de c_2, entre a et c_1, tel que $g''(c_2) = 0$.

Encore une fois, $g''(a) = f''(a) - \mathrm{P}''_n(a) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)\,n\,(a-a)^{n-1} = 0$.

Il existe donc c_3, entre a et c_2, tel que $g^{(3)} = 0$.

En poursuivant de même, on conclut qu'il existe c, compris entre a et x, tel que $g^{(n+1)}(c) = 0 = f^{(n+1)}(c) - \mathrm{P}_n^{(n+1)}(c) - \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)!\,.$

Mais $\mathrm{P}_n^{(n+1)}(t) = 0$, attendu que P_n est un polynôme de degré n.

D'où l'on conclut que $\mathrm{R}_n(x) = f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$.

Exemple Les physiciens utilisent fréquemment l'approximation $\sin(x) \approx x$, lorsque x est proche de 0. Estimons l'erreur ainsi commise.

D'après l'exercice 7.2, l'approximation $\sin(x) \approx x$ est celle que donne le polynôme de Taylor de degré 2 au voisinage de 0. Donc l'erreur commise vaut :

$\mathrm{R}_2(x) = \dfrac{\sin^{(3)}(c)}{3!}\,(x-0)^3 = -\dfrac{\cos(c)}{6}\,x^3$ avec c compris entre 0 et x.

Vu que $\big|\cos(c)\big| \leqslant 1$, l'erreur commise vaut tout au plus $\big|\mathrm{R}_2(x)\big| \leqslant \frac{1}{6}\,x^3$.

Par exemple, si $x = 10^\circ = \frac{\pi}{18}$, l'erreur ne dépasse pas $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0{,}000\ 886$.

7.5 1) Déterminer le polynôme de Taylor de degré 5 de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de $a = 0$.

2) Utiliser le résultat précédent pour estimer $\sqrt{e}$.

3) Quelle est l'imprécision de cette estimation ?

7.6 1) Quel est le polynôme de Taylor de degré 5 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de $a = \frac{\pi}{2}$?

2) Utiliser le résultat précédent pour estimer $\sin(100^\circ)$.

3) Quelle est l'imprécision de cette estimation ?

7.7 1) Justifier la formule approchée $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2\,a}$ avec $a > 0$.

2) Calculer $\sqrt{23}$ à l'aide de cette formule, en posant $a = 5$.

3) Évaluer l'erreur commise dans le calcul précédent.

7.8 Calculer $\sqrt[3]{7}$ au millième près, en approximant la fonction $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$.

7.9 Pour quelles valeurs de x l'erreur commise par la formule $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ est-elle inférieure à 0,0001 ?

7.10 1) Déterminer le polynôme de Taylor de degré n de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de $a = 0$.

2) Quel degré minimum doit avoir le polynôme de Taylor pour obtenir les 6 premières décimales de e ?

Indication : pour évaluer $\mathrm{R}_n(x)$, utiliser la majoration $e < 3$ établie à l'exercice 5.16.

Série de Taylor

On a vu que l'approximation d'une fonction f au voisinage de a par un polynôme de Taylor est d'autant meilleure que le degré du polynôme est élevé.

Il semble dès lors naturel qu'une fonction indéfiniment dérivable soit égale à son polynôme de Taylor de degré infiniment élevé, c'est-à-dire la série de Taylor :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

L'égalité entre une fonction et sa série de Taylor ne va pourtant pas de soi, car elle soulève deux problèmes :

1) la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ est-elle bien convergente ?

2) si la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ converge, converge-t-elle vers $f(x)$?

7.11 Le but de cet exercice est d'illustrer le premier problème.

1) (a) Déterminer le polynôme de Taylor de degré n au voisinage de $a = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   (b) Quelle est la série de Taylor correspondante ?

2) La série de Taylor est-elle convergente ?

L'exercice 7.11 montre qu'une série de Taylor peut converger pour certaines valeurs de x, mais diverger pour d'autres. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série de Taylor converge s'appelle le *domaine de convergence*. Lorsque ce dernier est donné par un intervalle de la forme $]a-r\,;a+r[$, c'est-à-dire que la série de Taylor converge si $|x-a| < r$, on appelle r le *rayon de convergence*.

Pour déterminer le domaine de convergence d'une série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(x-a)^k$, on applique généralement le critère du quotient ou le critère de la racine à la série de terme général positif $u_k = \left|c_k\,(x-a)^k\right|$.

Le deuxième problème que l'on peut rencontrer, en quelques occasions, est que la série de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ peut converger, mais pas vers $f(x)$.

La formule de Taylor permet de résoudre ce problème : elle garantit que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n(x) = 0$, alors la série de Taylor converge bien vers $f(x)$.
Mais, la vérification de ce critère est souvent difficile. Aussi admettra-t-on que les séries de Taylor présentées par la suite convergent bien vers la fonction.

7.12
1) Déterminer la série de Taylor de la fonction $f(x) = \ln(x)$ au voisinage de $a = 1$.
2) À l'aide du critère du quotient, calculer le rayon de convergence.
3) Pour déterminer complètement le domaine de convergence, il reste à étudier le comportement de la série au bord du domaine de convergence.
   (a) La série de Taylor converge-t-elle lorsque $x = 0$?
   (b) La série de Taylor converge-t-elle lorsque $x = 2$?
   (c) Finalement, quel est le domaine de convergence ?
4) Que vaut la série harmonique alternée $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^k}{k} + \ldots$?

7.13
1) Quelle est la série de Taylor de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de 0 ?
2) Quel est son domaine de convergence ?

7.14
1) Quelle est la série de Taylor de la fonction $\sin(x)$ au voisinage de 0 ?
2) Quel est son domaine de convergence ?

7.15
1) Quelle est la série de Taylor de la fonction $\cos(x)$ au voisinage de 0 ?
2) Quel est son domaine de convergence ?

Opérations sur les séries de Taylor

Plutôt que de calculer chaque coefficient d'une série de Taylor au moyen de la formule $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, on peut parfois éviter bien des calculs en exploitant les séries de Taylor déjà obtenues précédemment.

Déterminons, par exemple, la série de Taylor de la fonction $f(x) = e^{x^2}$.
On sait déjà que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$

Il suffit de remplacer x par x^2 pour obtenir le résultat désiré :

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \ldots + \frac{(x^2)^k}{k!} + \ldots \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{k!} + \ldots \end{aligned}$$

7.16 Quelle est la série de Taylor au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{2x}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$ 3) $f(x) = x\,e^x$

7.17 Quelle est la série de Taylor au voisinage de 0 des fonctions suivantes ?

1) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ 2) $f(x) = \cos^2(x)$

Indication : $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2\,x)}{2}$

7.18 À partir de la série de Taylor de $\dfrac{1}{1-x}$ établie à l'exercice 7.11, déterminer les séries de Taylor des fonctions suivantes, ainsi que leur domaine de convergence :

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{3-2\,x}$

7.19 À partir de la série de Taylor de $\ln(x)$ établie à l'exercice 7.12, déterminer les séries de Taylor des fonctions suivantes, ainsi que leur domaine de convergence :

1) $f(x) = \ln(1+x)$ 2) $f(x) = \ln(1-x)$ 3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Théorème *Si une série de Taylor* $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(x-a)^k$ *a un rayon de convergence* $r > 0$, *alors elle est dérivable et intégrable terme à terme sur* $]a-r\,;a+r[$ *:*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,c_k\,(x-a)^{k-1} \qquad et \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{k+1}\,(x-a)^{k+1} + c$$

Le rayon de convergence de ces deux nouvelles séries vaut également r.

Ce théorème résulte de la propriété de convergence uniforme des séries entières, qui permet de permuter somme et limite. On admettra le résultat sans preuve.

7.20 1) Dériver l'égalité $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots$ pour obtenir la série de Taylor de la fonction $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Quel est son domaine de convergence ?

2) En intégrant $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots$, de quelle fonction obtient-on la série de Taylor ? Quel est son domaine de convergence ?

7.21 En procédant de manière similaire, déterminer la série de Taylor de la fonction $f(x) = \arctan(x)$. Quel est son domaine de convergence ?

7.22 **Calcul de π**

1) En remplaçant $x = 1$ dans le développement en série de la fonction $\arctan(x)$, quelle formule obtient-t-on pour calculer π ?
2) Combien de termes faut-il additionner pour obtenir les trois premières décimales de π ? Pourquoi la convergence est-elle aussi lente ?
3) (a) À partir de la formule $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\,\tan(\beta)}$, établir une formule pour $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$.
   (b) En déduire que $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.
   (c) En utilisant les séries de Taylor de chacune de ces trois fonctions, combien de termes faut-il additionner pour obtenir les six premières décimales de π ?

Réponses

7.2

1) $P_1(x) = x$
2) $P_2(x) = x$
3) $P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$
4) $P_4(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$
5) $P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$
6) $P_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$
7) $P_{2n+1}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!}$

7.3

1) $P_1(x) = 1$
2) $P_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!}$
3) $P_3(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!}$
4) $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$
5) $P_5(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$
6) $P_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}$

7) $P_{2n}(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \, \dfrac{x^{2n}}{(2\,n)!}$

7.4 1) $x = 1$ 2) $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}} \approx 1{,}049\ 295$

valeur exacte : $x = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}047\ 198$

7.5 1) $P_5(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$

2) $\frac{6331}{3840} \approx 1{,}648\ 698$ 3) $\left|R_5\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^6 \cdot 6!} \cdot 2 = \frac{1}{23\ 040}$

7.6 1) $P_5(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$

2) $\sin(100^\circ) = \sin\left(\frac{5\,\pi}{9}\right) \approx \frac{2\ 519\ 424 - 3888\,\pi^2 + \pi^4}{2\ 519\ 424} \approx 0{,}984\ 808$

3) $\left|R_6\left(\frac{5\,\pi}{9}\right)\right| \leqslant \frac{\pi^6}{6!\,18^6} \approx 3{,}926 \cdot 10^{-8}$

7.7 1) $a + \dfrac{x}{2\,a}$ est le polynôme de Taylor de degré 1 au voisinage de 0

2) $\sqrt{23} \approx \frac{24}{5} = 4{,}8$ 3) $\left|R_1(-2)\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{23^3}} \approx 0{,}004\ 533$

7.8 $\sqrt[3]{7} \approx 2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = \frac{551}{288} \approx 1{,}913\ 194$ $\left|R_2(-1)\right| \leqslant \dfrac{5}{81\,\sqrt[3]{7^8}} \approx 0{,}000\ 344$

7.9 $x \in \left]-\frac{\sqrt[4]{24}}{10}\,;\,\frac{\sqrt[4]{24}}{10}\right[\approx \left]-0{,}221\,;0{,}221\right[$

7.10 1) $P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$

2) Le polynôme de Taylor doit être au minimum de degré 11.

7.11 1) (a) $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

2) La série de Taylor ne converge que si $|x| < 1$, c'est-à-dire si $x \in \left]-1\,;1\right[$

7.12 1) $\ln(x) = x - 1 - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{k-1}\,\dfrac{(x-1)^k}{k} + \ldots$

2) $r = 1$

3) (a) divergente (b) convergente (c) $\left]0\,;2\right]$

4) $-\ln(2)$

7.13 1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$ 2) $\mathbb{R}$

7.14 1) $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k\,\dfrac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} + \ldots$ 2) $\mathbb{R}$

7.15 1) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2\,k)!} + \ldots$ 2) $\mathbb{R}$

7.16 1) $e^{2x} = 1 + 2\,x + \dfrac{2^2}{2!}\,x^2 + \dfrac{2^3}{3!}\,x^3 + \dfrac{2^4}{4!}\,x^4 + \ldots + \dfrac{2^k}{k!}\,x^k + \ldots$

2) $\dfrac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{1}{2!}\,x^4 - \dfrac{1}{3!}\,x^6 + \dfrac{1}{4!}\,x^8 + \ldots + (-1)^k \dfrac{1}{k!}\,x^{2k} + \ldots$

3) $x\,e^x = x + x^2 + \dfrac{1}{2!}\,x^3 + \dfrac{1}{3!}\,x^4 + \dfrac{1}{4!}\,x^5 + \ldots + \dfrac{1}{k!}\,x^{k+1} + \ldots$

7.17 1) $1 + \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{2^2\,2!}\,x^2 - \dfrac{1}{2^3\,3!}\,x^3 + \dfrac{1}{2^4\,4!}\,x^4 + \dfrac{1}{2^5\,5!}\,x^5 - \dfrac{1}{2^6\,6!}\,x^6 - \dfrac{1}{2^7\,7!}\,x^7 + \ldots$

2) $1 - \dfrac{2}{2!}\,x^2 + \dfrac{2^3}{4!}\,x^3 - \dfrac{2^5}{6!}\,x^6 + \ldots + (-1)^k \dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!}\,x^{2k} + \ldots$

7.18 1) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^k\,x^k + \ldots$ si $x \in \left]-1\,;1\right[$

2) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^k\,x^{2k} + \ldots$ si $x \in \left]-1\,;1\right[$

3) $\dfrac{1}{3-2\,x} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9}\,x + \dfrac{4}{27}\,x^2 + \dfrac{8}{81}\,x^3 + \ldots + \dfrac{2^k}{3^{k+1}}\,x^k + \ldots$ si $x \in \left]-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$

7.19 1) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k+1}\,\dfrac{x^k}{k} + \ldots$ si $x \in \left]-1\,;1\right]$

2) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots - \dfrac{x^k}{k} - \ldots$ si $x \in \left[-1\,;1\right[$

3) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\,x + \dfrac{2}{3}\,x^3 + \dfrac{2}{5}\,x^5 + \ldots + \dfrac{2}{2\,k+1}\,x^{2k+1} + \ldots$ si $x \in \left]-1\,;1\right[$

7.20 1) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \ldots + (k+1)\,x^k + \ldots$ si $x \in \left]-1\,;1\right[$

2) $\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \dfrac{x^k}{k} + \ldots$ si $x \in \left[-1\,;1\right[$

7.21 $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k\,\dfrac{x^{2k+1}}{2\,k+1} + \ldots$ si $x \in [-1\,;1]$

7.22 1) $\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots + (-1)^k\,\dfrac{1}{2\,k+1} + \ldots\right)$

2) Il faut poursuivre l'addition jusqu'à 2454 termes, car $x = 1$ se situe au bord du domaine de convergence.

3) (a) $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) - \tan(\alpha)\,\tan(\beta)\,\tan(\gamma)}{1 - \tan(\alpha)\,\tan(\beta) - \tan(\alpha)\,\tan(\gamma) - \tan(\beta)\,\tan(\gamma)}$

(c) Il suffit d'additionner les neuf premiers termes de chaque série.