7.1 En évaluant le polynôme $\mathrm{P}_n(x)$ en $x = a$, on obtient :

$$f(a) = \mathrm{P}_n(a) = c_0 + c_1\,\underbrace{(a-a)}_{0} + c_2\,\underbrace{(a-a)^2}_{0} + c_3\,\underbrace{(a-a)^3}_{0} + \ldots + c_n\,\underbrace{(a-a)^n}_{0}$$

$$f(a) = \mathrm{P}_n(a) = c_0$$

Calculons la dérivée première du polynôme $\mathrm{P}_n(x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n'(x) &= (c_0)' + \big(c_1\,(x-a)\big)' + \big(c_2\,(x-a)^2\big)' + \big(c_3\,(x-a)^3\big)' + \ldots + \big(c_n\,(x-a)^n\big)' \\ &= 0 + c_1 + 2\,c_2\,(x-a) + 3\,c_3\,(x-a)^2 + \ldots + n\,c_n\,(x-a)^{n-1}\end{aligned}$$

En évaluant la dérivée $\mathrm{P}_n'(x)$ en $x = a$, on obtient :

$$f'(a) = \mathrm{P}_n'(a) = c_1 + 2\,c_2\,\underbrace{(a-a)}_{0} + 3\,c_3\,\underbrace{(a-a)^2}_{0} + \ldots + n\,c_n\,\underbrace{(a-a)^{n-1}}_{0}$$

$$f'(a) = \mathrm{P}_n'(a) = c_1$$

Calculons la dérivée seconde du polynôme $\mathrm{P}_n(x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n''(x) &= (c_1)' + \big(2\,c_2\,(x-a)\big)' + \big(3\,c_3\,(x-a)^2\big)' + \ldots + \big(n\,c_n\,(x-a)^{n-1}\big)' \\ &= 0 + 2\,c_2 + 3\cdot 2\,c_3\,(x-a) + \ldots + n\,(n-1)\,c_n\,(x-a)^{n-2}\end{aligned}$$

En évaluant la dérivée seconde $\mathrm{P}_n''(x)$ en $x = a$, on obtient :

$$f''(a) = \mathrm{P}_n''(a) = 2\,c_2 + 3\cdot 2\,c_3\,\underbrace{(a-a)}_{0} + \ldots + n\,(n-1)\,c_n\,\underbrace{(a-a)^{n-2}}_{0}$$

$$f''(a) = \mathrm{P}_n''(a) = 2\,c_2 \quad \text{si bien que} \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

Calculons la dérivée troisième du polynôme $\mathrm{P}_n(x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n^{(3)}(x) &= (2\,c_2)' + \big(3\cdot 2\,c_3\,(x-a)\big)' + \ldots + \big(n\,(n-1)\,c_n\,(x-a)^{n-2}\big)' \\ &= 0 + 3\cdot 2\,c_3 + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\,c_n\,(x-a)^{n-3}\end{aligned}$$

En évaluant la dérivée troisième $\mathrm{P}_n^{(3)}(x)$ en $x = a$, on obtient :

$$f^{(3)}(a) = \mathrm{P}_n^{(3)}(a) = 3\cdot 2\,c_3 + 4\cdot 3\cdot 2\,c_4\,\underbrace{(a-a)}_{0} + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\,c_n\,\underbrace{(a-a)^{n-3}}_{0}$$

$$f^{(3)}(a) = \mathrm{P}_n^{(3)}(a) = 3\cdot 2\,c_3 = 3!\,c_3 \quad \text{si bien que} \quad c_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

$\vdots$

On poursuit ainsi de même jusqu'à la n-ième dérivée :

$$\mathrm{P}^{(n)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,3\cdot 2\,c_n = n!\,c_n$$

En évaluant la n-ième dérivée $\mathrm{P}_n^{(n)}(x)$ en $x = a$, on obtient :

$$f^{(n)}(a) = \mathrm{P}^{(n)}(a) = n!\,c_n \quad \text{d'où} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$