7.10 1) En reprenant les calculs de l'exercice 7.5, on obtient aussitôt le polynôme de Taylor de degré n au voisinage de $a = 0$:

$$\mathrm{P}_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

2) Pour obtenir les 6 premières décimales de $e = f(1)$, on a besoin que $\big|\mathrm{R}_n(1)\big| < 0{,}5 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{20\ 000\ 000}$.

$$\big|\mathrm{R}_n(1)\big| = \Big|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}\Big| = \frac{e^c}{(n+1)!} \quad \text{avec } c \in [0\,;1]$$

Vu que la fonction $f(x) = e^x$ est croissante, on a $e^c \leqslant e^1 < 3$.
Donc $\big|\mathrm{R}_n(1)\big| < \frac{3}{(n+1)!}$.

Il reste finalement à résoudre l'inéquation suivante :
$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{20\ 000\ 000}$
$60\ 000\ 000 < (n+1)!$

On constate que $(10+1)! = 11! = 39\ 916\ 800 < 60\ 000\ 000$
mais que $(11+1)! = 12! = 479\ 001\ 600 > 60\ 000\ 000$

On conclut que pour calculer les 6 premières décimales de e, on doit recourir à un polynôme de Taylor de degré $\geqslant 11$.

$$\begin{aligned} e \approx \mathrm{P}_{11}(1) &= 1 + 1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \tfrac{1}{5!} + \tfrac{1}{6!} + \tfrac{1}{7!} + \tfrac{1}{8!} + \tfrac{1}{9!} + \tfrac{1}{10!} + \tfrac{1}{11!} \\ &= \tfrac{13\ 563\ 139}{4\ 989\ 600} \approx 2{,}718\ 281 \end{aligned}$$