7.11 1) (a) $f(0)=\frac{1}{1-0}=1$

$$f'(x)=\left(\tfrac{1}{1-x}\right)'=\left((1-x)^{-1}\right)'=(-1)\,(1-x)^{-2}\,\big(1-x\big)'$$
$$=(-1)\,(1-x)^{-2}\,(-1)=(1-x)^{-2}=\tfrac{1}{(1-x)^2}$$
$$f'(0)=\tfrac{1}{(1-0)^2}=1$$

$$f''(x)=\left(\tfrac{1}{(1-x)^2}\right)'=\left((1-x)^{-2}\right)'=(-2)\,(1-x)^{-3}\,\big(1-x\big)'$$
$$=(-2)\,(1-x)^{-3}\,(-1)=2\,(1-x)^{-3}=\tfrac{2}{(1-x)^3}$$
$$f''(0)=\tfrac{2}{(1-0)^3}=2$$

$$f^{(3)}(x)=\left(\tfrac{2}{(1-x)^3}\right)'=2\left((1-x)^{-3}\right)'=2\,(-3)\,(1-x)^{-4}\,\big(1-x\big)'$$
$$=2\,(-3)\,(1-x)^{-4}\,(-1)=2\cdot 3\,(1-x)^{-4}=\tfrac{3!}{(1-x)^4}$$
$$f^{(3)}(0)=\tfrac{3!}{(1-0)^4}=3!$$

$$f^{(4)}(x)=\left(\tfrac{3!}{(1-x)^4}\right)'=3!\left((1-x)^{-4}\right)'=3!\,(-4)\,(1-x)^{-5}\,\big(1-x\big)'$$
$$=3!\,(-4)\,(1-x)^{-5}\,(-1)=3!\cdot 4\,(1-x)^{-5}=\tfrac{4!}{(1-x)^5}$$
$$f^{(4)}(0)=\tfrac{4!}{(1-0)^5}=4!$$

Montrons par récurrence que $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ et $f^{(k)}(0)=k!$

L'initialisation a clairement été établie. Prouvons l'hérédité :

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\tfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right)'=k!\left((1-x)^{-(k+1)}\right)'$$
$$=k!\,\big(-(k+1)\big)\,(1-x)^{-(k+1)-1}\,(1-x)'$$
$$=k!\,\big(-(k+1)\big)\,(1-x)^{-(k+2)}\,(-1)=k!\,(k+1)\,(1-x)^{-(k+2)}$$
$$=\tfrac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$$
$$f^{(k+1)}(0)=\tfrac{(k+1)!}{(1-0)^{k+2}}=(k+1)!$$

$$\mathrm{P}_n(x)=1+1\,(x-0)+\tfrac{2}{2!}\,(x-0)^2+\tfrac{3!}{3!}\,(x-0)^3+\ldots+\tfrac{n!}{n!}\,(x-0)^n$$
$$=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$$

(b) La série de Taylor correspondante s'écrit donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}_n(x)=\lim_{n\to+\infty}1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$$

2) La série de Taylor de la fonction $f(x)=\frac{1}{1-x}$ coïncide avec une série géométrique de raison x. Comme on l'a vu à l'exercice 5.6, cette série ne converge que si sa raison x vérifie la condition $|x|<1$.