7.12 1) $f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$
$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = \big(\frac{1}{x}\big)' = \big(x^{-1}\big)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$f^{(3)}(x) = \big(-\frac{1}{x^2}\big)' = \big(-x^{-2}\big)' = -(-2)\,x^{-3} = \frac{2}{x^3}$
$f^{(3)}(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$f^{(4)}(x) = \big(\frac{2}{x^3}\big)' = \big(2\,x^{-3}\big)' = (-3)\cdot 2\,x^{-4} = \frac{3!}{x^4}$
$f^{(4)}(1) = \frac{3!}{1^4} = 3!$

Montrons que $f^{(k)} = (-1)^{k-1}\,\frac{(k-1)!}{x^k}$ et $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}\,(k-1)!$

L'initialisation du raisonnement par récurrence a déjà été établie, il reste à prouver l'hérédité.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \big(f^{(k)}(x)\big)' = \Big((-1)^{k-1}\,\frac{(k-1)!}{x^k}\Big)' = \big((-1)^{k-1}\,(k-1)!\,x^{-k}\big)' \\ &= (-1)^{k-1}\,(-k)\,(k-1)!\,x^{-k-1} = (-1)^k\,k!\,x^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k\,\frac{k!}{x^{k+1}} \end{aligned}$$

$f^{(k+1)}(1) = (-1)^k\,\frac{k!}{1^{k+1}} = (-1)^k\,k!$

Nous pouvons désormais écrire la série de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{k!}\,(x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(x-1)^k \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k} + \ldots \end{aligned}$$

2) Utilisons le critère du quotient pour étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \big|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(x-1)^k\big| = \frac{|x-1|^k}{k}$:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{|x-1|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|x-1|^k}{k}} = \lim_{k\to+\infty} |x-1|\,\frac{k+1}{k} = |x-1|\,\lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} \\ &= |x-1|\,\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k} = |x-1|\cdot 1 = |x-1| \end{aligned}$$

Le critère du quotient affirme que la série de Taylor converge si $|x-1| < 1$, c'est-à-dire si $x \in\,]0\,;2[$.

On a ainsi obtenu un rayon de convergence $r = 1$.

3) (a) Lorsque $x = 0$, la série de Taylor devient la série numérique

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(0-1)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,(-1)^{(k-1)+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,\underbrace{(-1)^{2k-1}}_{=-1} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

qui n'est autre que l'opposé de la série harmonique.

C'est pourquoi, la série de Taylor diverge lorsque $x = 0$.

(b) Lorsque $x = 2$, la série de Taylor devient la série numérique

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(2-1)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,1^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

qui se révèle être la série harmonique alternée, dont on sait, grâce au critère de Leibniz, qu'elle converge.

(c) En synthétisant les résultats des points 2), 3) (a) et 3) (b), on conclut que le domaine de convergence est $]0\,;2]$.

4) En admettant que la série de Taylor converge bien vers $f(2)$ lorsque $x = 2$, on obtient la somme de la série harmonique alternée :

$$\begin{aligned} -1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k} + \ldots &= -\big(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \ldots\big) \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -f(2) = -\ln(2) \end{aligned}$$