7.13

1) On a déjà déterminé le polynôme de Taylor de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de 0 à l'exercice 7.10 1).

Aussi peut-on directement écrire la série de Taylor correspondante :

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2) Étudions son domaine de convergence en appliquant le critère du quotient à la série de terme général $u_k = \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^k}{k!}$:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \to +\infty} |x| \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$= |x| \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = |x| \cdot 0 = 0 < 1$$

On constate que la série de Taylor converge, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.