7.14 1) On a déjà déterminé le polynôme de Taylor de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au voisinage de 0 à l'exercice 7.2 7).

Aussi peut-on directement écrire la série de Taylor correspondante :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}$$

2) Étudions son domaine de convergence en appliquant le critère du quotient à la série de terme général $u_k = \left|(-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}\right| = \frac{|x|^{2k+1}}{(2\,k+1)!}$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{|x|^{2k+3}}{(2\,k+3)!}}{\frac{|x|^{2k+1}}{(2\,k+1)!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^{2k+3}}{|x|^{2k+1}} \cdot \frac{(2\,k+1)!}{(2\,k+3)!}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} |x|^2 \cdot \frac{1}{(2\,k+2)\,(2\,k+3)} = |x|^2 \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(2\,k+2)\,(2\,k+3)}$$

$$= |x|^2 \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\,k \cdot 2\,k} = |x|^2 \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{4\,k^2} = |x|^2 \cdot 0 = 0 < 1$$

On constate que la série de Taylor converge, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.