7.15 1) On a déjà déterminé le polynôme de Taylor de la fonction $f(x) = \cos(x)$ au voisinage de 0 à l'exercice 7.3 7).

Aussi peut-on directement écrire la série de Taylor correspondante :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \, \frac{x^{2k}}{(2\,k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k}}{(2\,k)!}$$

2) Étudions son domaine de convergence en appliquant le critère du quotient à la série de terme général $u_k = \left|(-1)^k \, \frac{x^{2k}}{(2\,k)!}\right| = \frac{x^{2k}}{(2\,k)!}$:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{x^{2k+2}}{(2\,k+2)!}}{\frac{x^{2k}}{(2\,k)!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{x^{2k+2}}{x^{2k}} \cdot \frac{(2\,k)!}{(2\,k+2)!}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{(2\,k+1)\,(2\,k+2)} = x^2 \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{(2\,k+1)\,(2\,k+2)}$$

$$= x^2 \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\,k \cdot 2\,k} = x^2 \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{4\,k^2} = x^2 \cdot 0 = 0 < 1$$

On constate que la série de Taylor converge, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.