7.18 1) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,x^k$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^k\,x^k + \ldots$

La convergence de la série de Taylor n'a lieu qu'aux conditions suivantes (toutes équivalentes) :
$-x \in \,]-1\,;1[$
$-1 < -x < 1$
$1 > x > -1$
$x \in \,]-1\,;1[$
Le domaine de convergence est ainsi $]-1\,;1[$.

2) $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,x^{2k}$

$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^k\,x^{2k} + \ldots$

La convergence de la série de Taylor n'a lieu qu'aux conditions suivantes (toutes équivalentes) :
$-x^2 \in \,]-1\,;1[$
$-1 < -x^2 < 1$
$1 > x^2 > -1$
$1 > x^2$ en effet : $x^2 \geqslant 0 > -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$1 - x^2 > 0$
$(1-x)\,(1+x) > 0$

		-1		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
f	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in \,]-1\,;1[$
Le domaine de convergence est ainsi $]-1\,;1[$.

3) $\dfrac{1}{3-2\,x} = \dfrac{1}{3\,(1-\frac{2}{3}\,x)} = \frac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}\,x} = \frac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\big(\tfrac{2}{3}\,x\big)^k = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{2^k}{3^k}\,x^k$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2^k}{3^k}\,x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{2^k}{3^{k+1}}\,x^k$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\,x + \frac{4}{27}\,x^2 + \frac{8}{81}\,x^3 + \ldots + \frac{2^k}{3^{k+1}}\,x^k + \ldots$

La convergence de la série de Taylor n'a lieu qu'aux conditions suivantes (toutes équivalentes) :
$\frac{2}{3}\,x \in \,]-1\,;1[$

$-1 < \frac{2}{3}\,x < 1$
$-3 < 2\,x < 3$
$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$
$x \in \left]-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$
Le domaine de convergence est ainsi $\left]-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$.