7.19 1) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\big((1+x)-1)\big)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \ldots$$

La convergence de la série de Taylor n'a lieu qu'aux conditions suivantes (toutes équivalentes) :
$1 + x \in \,]0\,;2]$
$0 < 1 + x \leqslant 2$
$-1 < x \leqslant 1$
$x \in \,]-1\,;1]$
Le domaine de convergence est ainsi $]-1\,;1]$.

2) $\ln(1-x) = \ln\big(1+(-x)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-1)^k\, x^k}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot (-1)^k \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{=-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{x^k}{k}$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^k}{k} - \ldots$$

La convergence de la série de Taylor n'a lieu qu'aux conditions suivantes (toutes équivalentes) :
$-x \in \,]-1\,;1]$
$-1 < -x \leqslant 1$
$1 > x \geqslant -1$
$x \in \,[-1\,;1[$
Le domaine de convergence est ainsi $[-1\,;1[$.

3) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{x^k}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} - \left(-\frac{x^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{x^k}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \big((-1)^{k+1} + 1\big) \frac{x^k}{k}$$

Or $(-1)^{k+1} + 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$.

Il ne reste par conséquent que les termes impairs de cette série :

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\, \frac{x^{2k+1}}{2\,k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2\,k+1}\, x^{2k+1}$

$$= 2\,x + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{2}{5}\,x^5 + \ldots + \frac{2}{2\,k+1}\,x^{2k+1} + \ldots$$

Cette série de Taylor ne peut converger que si les deux séries de Taylor de $\ln(1+x)$ et de $\ln(1-x)$ sont toutes deux convergentes, c'est-à-dire si $x \in \,]-1\,;1] \cap [-1\,;1[\, = \,]-1\,;1[$