7.20 1) $$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \big((1-x)^{-1}\big)' = -1\,(1-x)^{-2}\,\underbrace{(1-x)'}_{-1} = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty}(x^k)' = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,x^k$$

$$= 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \ldots + (k+1)\,x^k + \ldots$$

En égalant ces deux dérivées, on obtient la série de Taylor recherchée :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,x^k = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \ldots + (k+1)\,x^k + \ldots$$

Cette égalité n'est cependant garantie qu'au sein du même rayon de convergence, en l'occurrence sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$.

Il reste à examiner la situation aux bords du domaine de convergence :

(a) Si $x = -1$, on a affaire à la série alternée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,(k+1)$.

Vu que le terme général $u_k = k+1$ ne satisfait ni à la première condition ($\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = +\infty \neq 0$) ni à la seconde condition (la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante) du critère de Leibniz, cette série alternée est manifestement divergente.

(b) Si $x = 1$, on se retrouve avec la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)$ qui, de toute évidence, diverge, car son terme général ne tend pas vers 0 : $\lim\limits_{k\to+\infty} k+1 = +\infty \neq 0$.

On conclut que le domaine de convergence se réduit à $]-1\,;1[$.

2) $$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \frac{-1}{1-x}\,dx = -\int \frac{(1-x)'}{1-x}\,dx = -\ln\big(|1-x|\big)$$

$$\int\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\Big)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int x^k\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k+1}\,x^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{1}{k}\,x^k$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^k}{k} + \ldots$$

En égalant ces deux intégrales, on obtient la série de Taylor recherchée :

$$\ln\big(|1-x|\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k}\,x^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^k}{k} + \ldots$$

Cette égalité n'est cependant garantie qu'au sein du même rayon de convergence, en l'occurrence sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$.

Il reste à examiner la situation aux bords du domaine de convergence :

(a) Si $x = -1$, on a affaire à la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{1}{k}$, dont on sait qu'elle converge.

(b) Si $x = 1$, on se retrouve avec la série harmonique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k}$, qui, en revanche, diverge.

On conclut que le domaine de convergence se ramène à $[-1\,;1[$.

Attendu que $|1-x| = 1-x$ si $1-x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant x$
ce qui est le cas avec $x \in [-1\,;1[$

on peut finalement simplifier l'écriture de la série de Taylor :

$$\ln\big(|1-x|\big) = \ln(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k}\,x^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^k}{k} + \ldots$$