7.21 L'exercice 7.18 2) a donné la formule :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^k\, x^{2k} + \ldots$$

avec pour domaine de convergence $]-1\,;1[$.

Intégrons les deux membres de cette égalité :

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$$

$$\int \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, x^{2k}\Big)\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int x^{2k}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{2\,k+1}$$

En égalant ces deux intégrales, on obtient la série de Taylor recherchée :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{2\,k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{2\,k+1} + \ldots$$

Cette égalité n'est cependant garantie qu'au sein du même rayon de convergence, en l'occurrence sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$.

Il reste à examiner la situation aux bords du domaine de convergence :

1) Si $x = -1$, on a affaire à la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{(-1)^{2k+1}}{2\,k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{3k+1}\, \frac{1}{2\,k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}\, \frac{1}{2\,k+1}\,.$$

Cette série alternée, de terme général $u_k = \frac{1}{2\,k+1}$, satisfait les conditions du critère de Leibniz :

(a) $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{2\,k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{2\,k} = 0$

(b) $k < k+1$

$2\,k < 2\,(k+1)$

$2\,k+1 < 2\,(k+1)+1$

$\frac{1}{2\,k+1} > \frac{1}{2\,(k+1)+1}$

$u_k > u_{k+1}$

La série alternée est donc bien convergente.

2) Si $x = 1$, on se retrouve avec la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{1^{2k+1}}{2\,k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{1}{2\,k+1}\,.$$

Cette série alternée, de terme général $u_k = \frac{1}{2\,k+1}$, satisfait les conditions du critère de Leibniz, exactement comme ci-dessus.

Cette série alternée est donc aussi convergente.

On conclut que le domaine de convergence inclut que les deux bords : $[-1\,;1]$.