7.4 1) $1 - \frac{x^2}{2!} = \frac{1}{2}$

$2 - x^2 = 1$

$0 = x^2 - 1 = (x-1)\,(x+1)$

On obtient donc $x = \pm 1$

2) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{2}$

$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = \frac{1}{2}$

$24 - 12\,x^2 + x^4 = 12$

$x^4 - 12\,x^2 + 12 = 0$

En posant $y = x^2$, cette équation devient $y^2 - 12\,y + 12 = 0$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 96 = 4^2 \cdot 6$

(a) $y_1 = \frac{-(-12)-\sqrt{96}}{2\cdot 1} = \frac{12-4\sqrt{6}}{2} = 6 - 2\sqrt{6}$

$x^2 = 6 - 2\sqrt{6}$ implique $x = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{6}} \approx \pm 1{,}049\ 295$

(b) $y_2 = \frac{-(-12)+\sqrt{96}}{2\cdot 1} = \frac{12+4\sqrt{6}}{2} = 6 + 2\sqrt{6}$

$x^2 = 6 + 2\sqrt{6}$ donne $x = \pm\sqrt{6 + 2\sqrt{6}} \approx \pm 3{,}301\ 360$

L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ a une infinité de solutions : $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vu que l'on utilise le polynôme de Taylor au voisinage de $a = 0$, la comparaison n'a de sens qu'au voisinage de 0.

C'est pourquoi, la première approximation $x = \pm 1$ et la seconde approximation $x = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{6}} \approx \pm 1{,}049\ 295$ doivent être comparées uniquement à la valeur exacte $x = \pm\frac{\pi}{3} \approx \pm 1{,}047\ 198$.