7.5 1) Rappelons que $f'(x) = \big(e^x\big)' = e^x = f(x)$.

Il en résulte $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \geqslant 0$.

C'est pourquoi $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ pour tout $k \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_5(x) &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \tfrac{f^{(3)}(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \tfrac{f^{(4)}(a)}{4!}\,(x-a)^4 + \tfrac{f^{(5)}(a)}{5!}\,(x-a)^5\\ &= 1 + 1\,(x-0) + \tfrac{1}{2!}\,(x-0)^2 + \tfrac{1}{3!}\,(x-0)^3 + \tfrac{1}{4!}\,(x-0)^4 + \tfrac{1}{5!}\,(x-0)^5\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx \mathrm{P}_5\big(\tfrac{1}{2}\big) &= 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^2}{2!} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^3}{3!} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^4}{4!} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^5}{5!}\\ &\approx 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4\cdot 2} + \tfrac{1}{8\cdot 6} + \tfrac{1}{16\cdot 24} + \tfrac{1}{32\cdot 120} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{384} + \tfrac{1}{3840}\\ &\approx \tfrac{3840+1920+480+80+10+1}{3840} = \tfrac{6331}{3840} \approx 1{,}648\ 698\end{aligned}$$

3) $$\mathrm{R}_5\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{f^{(5+1)}(c)}{(5+1)!}\,\big(\tfrac{1}{2}-0\big)^{5+1} = \frac{e^c}{6!}\cdot\frac{1}{2^6} \quad \text{où } c \in [0\,;\tfrac{1}{2}]$$

Vu la croissance de la fonction e^x, on a $e^c \leqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.
Or, l'exercice 5.16 a montré que $e \leqslant 3$. Vu la croissance de la fonction racine, il s'ensuit que $\sqrt{e} \leqslant \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$.

Donc $\Big|\mathrm{R}_5\big(\tfrac{1}{2}\big)\Big| < \tfrac{2}{6!}\cdot\tfrac{1}{2^6} = \tfrac{1}{23\ 040}$.

Remarque : la majoration $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} < 2$ peut s'établir directement en majorant par une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^2}{2!} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^3}{3!} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^4}{4!} + \frac{\big(\frac{1}{2}\big)^5}{5!} + \ldots\\ &< 1 + \tfrac{1}{2} + \big(\tfrac{1}{2}\big)^2 + \big(\tfrac{1}{2}\big)^3 + \big(\tfrac{1}{2}\big)^4 + \big(\tfrac{1}{2}\big)^5 + \ldots = 1\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\end{aligned}$$