7.7

1) Montrons que l'approximation $\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2\,a}$ correspond au polynôme de Taylor de degré 1 de la fonction $f(x) = \sqrt{a^2+x}$ en 0.

$f(0) = \sqrt{a^2+0} = \sqrt{a^2} = |a| = a$

$$f'(x) = \big(\sqrt{a^2+x}\big)' = \big((a^2+x)^{\frac{1}{2}}\big)' = \tfrac{1}{2}\,(a^2+x)^{-\frac{1}{2}}\,(a^2+x)' = \frac{1}{2\sqrt{a^2+x}}$$

$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+0}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2\,|a|} = \frac{1}{2\,a}$

$\mathrm{P}_1(x) = f(0) + f'(0)\,(x-0) = a + \frac{1}{2\,a}\,(x-0) = a + \frac{x}{2\,a}$

2) $\sqrt{23} = \sqrt{5^2-2} \approx 5 + \frac{-2}{2\cdot 5} = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$

3) Avant d'estimer $\mathrm{R}_1(-2)$, il convient de calculer $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{a^2+x}}\right)' = \tfrac{1}{2}\,\big((a^2+x)^{-\frac{1}{2}}\big)' = -\tfrac{1}{4}\,(a^2+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{(a^2+x)^3}}$$

$$\mathrm{R}_1(-2) = \frac{f''(c)}{2!}(-2-0)^2 = -\frac{1}{2!\cdot 4\sqrt{(5^2+c)^3}}\cdot 4 \quad \text{où } c \in [-2\,;0].$$

La plus grande valeur prise par cette fraction s'obtient lorsque 5^2+c est le plus petit possible, c'est-à-dire quand $c=-2$.

Donc $\big|\mathrm{R}_1(-2)\big| \leqslant \left|-\frac{1}{2!\cdot 4\sqrt{\big(5^2+(-2)\big)^3}}\cdot 4\right| = \frac{1}{2\sqrt{23^3}} \approx 0{,}004\ 533.$