1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soient a et b deux entiers avec $b \neq 0$.
On dit que b **divise** a, ou que b est un **diviseur** de a, s'il existe un entier q tel que $a = b \cdot q$.
Si b divise a, on écrit $b \mid a$; dans le cas contraire, on écrit $b \nmid a$.

1.1 Soient a, b et c des entiers non nuls. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $1 \mid a$
2) $a \mid a$
3) $b \mid 0$
4) si $c \mid b$ et $b \mid a$, alors $c \mid a$
5) si $b \mid a$, alors $b\,c \mid a\,c$
6) si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors $c \mid (m\,a + n\,b)$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$

1.2 Soient a, b et c trois entiers. Montrer que si $a \nmid b\,c$, alors $a \nmid b$.

1.3 Si n est un nombre entier dont le carré est impair, montrer que n est impair.

1.4 Soit n un entier impair. Démontrer que la somme de n nombres consécutifs est toujours un multiple de n.
Le résultat est-il encore valable pour un entier pair ?

1.5 Trouver les entiers n pour lesquels la fraction $\dfrac{n+17}{n+4}$ est entière.

1.6

1) Déterminer les diviseurs positifs de 84.
2) Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 - 84$ soit le carré parfait d'un entier naturel ?

1.7

1) Réduire l'expression $(a + c)\,d - (b + d)\,c$.
2) Montrer que si $a\,d - b\,c = 1$, alors la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.
   Indication : utiliser la propriété 6) de l'exercice 1.1.

1.8

1) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n la fraction $\dfrac{n+8}{2\,n-5}$ est-elle elle-même un entier ?
2) Si elle n'est pas irréductible, quels peuvent être les diviseurs possibles de ses deux termes ?

Division euclidienne

Théorème de la division euclidienne

Soient a et b deux entiers naturels, b étant non nul.
Il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers naturels tels que

$$a = b\,q + r \quad \text{avec } 0 \leqslant r < b\,.$$

On dit que a est le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste** dans la division euclidienne de a par b.

Preuve

1) **Existence de q et r**

Considérons la suite arithmétique de premier terme a et de raison $-b$, c'est-à-dire de terme général $u_n = a - b\,n$.

Cette suite est strictement décroissante et à valeurs entières.

Soit $r = u_q$ le plus petit terme de la suite (u_n) qui soit positif ou nul.

Par définition, on constate que :

(a) $r = u_q = a - b\,q$ équivaut à $a = b\,q + r\,;$

(b) $r \geqslant 0\,;$

(c) $r - b = u_q - b = a - b\,q - b = a - b\,(q+1) = u_{q+1} < 0$
c'est-à-dire $r < b\,.$

1.9 2) **Unicité de q et r**

Supposons qu'il existe deux couples d'entiers $(q\,;r)$ et $(q'\,;r')$ tels que

$$a = b\,q + r = b\,q' + r' \quad \text{avec } 0 \leqslant r < b \text{ et } 0 \leqslant r' < b\,.$$

(a) Montrer que $r - r'$ est un multiple de b.

(b) Montrer que $-b < r - r' < b$.

(c) En déduire que $r = r'$, puis que $q = q'$.

1.10 1) Vérifier l'égalité $(n+1)^3 = n^2\,(n+3) + 3\,n + 1\,.$

2) Pour quels entiers naturels n le reste de la division de $(n+1)^3$ par n^2 est-il $3\,n+1$?

1.11 On veut déterminer des entiers naturels a, b, c, d tels que $\dfrac{142}{5^3} = a + \dfrac{b}{5} + \dfrac{c}{5^2} + \dfrac{d}{5^3}$ avec $0 \leqslant b < 5$, $0 \leqslant c < 5$ et $0 \leqslant d < 5$.

1) Montrer que si on divise 142 par 5, le reste est d.

2) En déduire une nouvelle relation ne faisant intervenir que a, b et c.

3) Finir le calcul et déterminer les valeurs de a, b, c et d.

Systèmes de numération

1.12 Dans son coffre-fort, Onc'Picsou compte ses louis d'or... Pour ne pas en oublier, il fait des tas de 10. Mais ça ne tombe pas juste et il reste 4 pièces isolées.

Il regroupe ensuite les tas précédents par paquets de 10. Là encore, ça ne tombe pas juste. Il y a 7 paquets de 10×10 pièces et 2 tas de 10 isolés.

Au total, Onc'Picsou a devant lui 7 paquets contenant 10×10 louis d'or, 2 tas de 10 pièces et 4 pièces. Il compte donc $7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4$ louis d'or.

Ce nombre se note 724 en **système décimal** ou **système de base** 10. Il apparaît comme une somme finie de puissances de 10. Par sa position, chacun des chiffres indique la puissance de 10 dont il est le coefficient.

1) On reprend maintenant la méthode de comptage en regroupant cette fois les louis d'or par 8.
   (a) Combien y aura-t-il de pièces seules ? de tas de 8 pièces ?
   (b) On regroupe les tas de 8 pièces en paquets de 8. Combien y a-t-il de paquets ? de tas isolés ?
   (c) On recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de regroupement possible. Le nombre s'écrit finalement sous la forme $a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + c \cdot 8 + d$, où a, b, c et d sont quatre chiffres compris entre 0 et 7. Écrire le nombre de louis d'or dans le système de base 8.
2) Riri, Fifi et Loulou, eux, ne savent compter que jusqu'à 4. Reprendre la procédure ci-dessus en regroupant les pièces d'or par 4. Comment le nombre de pièces s'exprime-t-il dans le système de base 4 ?

Considérons un entier naturel $b \geqslant 2$.

Soient $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ des entiers avec $0 \leqslant a_i < b$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$.

Dire que l'entier N a pour écriture $\overline{a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_2\, a_1\, a_0}$ en base b signifie que $\mathrm{N} = \overline{a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_2\, a_1\, a_0} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0$.

Remarque : le trait de surlignement permet de distinguer le nombre écrit en base b du produit $a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_2\, a_1\, a_0$.

1.13 Quels sont les entiers définis par :

1) $\overline{14}$ en base 9
2) $\overline{14}$ en base 5
3) $\overline{421}$ en base 6
4) $\overline{10\,001}$ en base 2

1.14 Quelle est la plus petite base b telle que $\overline{237\,054}$ soit l'écriture d'un entier N en base b ? Que vaut N ?

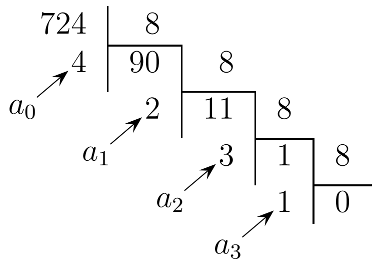
Comme on l'a vu à l'exercice 1.12, pour écrire un nombre en base b, on calcule le reste dans la division du nombre par b, puis le reste dans la division du quotient par b, etc.

La procédure s'arrête quand un quotient est nul.

Les restes obtenus fournissent les chiffres de l'écriture en base b, en partant du chiffre des unités.

On écrit souvent les divisions successives enchaînées les unes aux autres.

Par exemple, le nombre 724 s'écrit $\overline{1324}$ en base 8.



1.15 Les entiers suivants sont écrits en système décimal ; les écrire dans la base indiquée :

1) 47 en base 3 2) 49 en base 2 3) 5000 en base 8

1.16 **Multiplication dite « du paysan »**

Ou « Comment multiplier deux nombres sans calculatrice quand on ne se souvient que de la table de multiplication par 2 ? »

Pour calculer 21×23, on effectue les calculs ci-contre qui donnent pour résultat : $21 \times 23 = 483$.

21	23
~~10~~	~~46~~
5	92
~~2~~	~~184~~
1	368
	483

1) **Observation**

(a) Comment a été formée la colonne de gauche à partir du nombre 21 ? Et celle de droite à partir de 23 ? Quelle caractéristique particulière ont les lignes qui ont été barrées ?

(b) Appliquer le même procédé pour calculer un produit de votre choix.

2) **Justification**

(a) Écrire 21 en base 2.
Expliquer pourquoi le procédé employé permet bien de trouver le produit de 21 par un autre nombre.

(b) Généraliser.

1.17 Démontrer que la somme $\overline{x\,y\,z} + \overline{y\,z\,x} + \overline{z\,x\,y}$, écrite en base 10, est divisible par 111.

1.18 Un nombre s'écrit avec deux chiffres. La différence entre ce nombre et celui obtenu en permutant les deux chiffres est égale à $\overline{12}$.
Dans quelle base b cette égalité a-t-elle eu lieu ?

Réponses

1.5 $n \in \{-17\,;-5\,;-3\,;9\}$

1.6 $n = 10$ ou $n = 22$

1.8 1) $n \in \{-8\,;-1\,;1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;13\}$ 2) $-21\,;-7\,;-3\,;3\,;7\,;21$

1.10 2) $n \geqslant 4$

1.11 3) $a = 1$ $b = 0$ $c = 3$ $d = 2$

1.12 1) (a) 4 pièces seules et 90 tas de 8 pieces
(b) 11 paquets et 2 tas isolés
(c) $\overline{1324}$ en base 8
2) $\overline{23\ 110}$ en base 4

1.13 1) 13 2) 9 3) 157 4) 17

1.14 $b = 8$ $\mathrm{N} = 81\ 452$

1.15 1) $\overline{1202}$ 2) $\overline{110\ 001}$ 3) $\overline{11\ 610}$

1.18 $b = 4$