

1.4 Soit n un entier impair.

Considérons n nombres consécutifs $a, a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + n - 1$.

Calculons leur somme :

$$\begin{aligned} a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + \dots + (a + n - 1) &= \\ \underbrace{(a + a + a + \dots + a)}_{n \text{ fois}} + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) &= \\ na + \frac{(n - 1)n}{2} &= n \left(a + \frac{n - 1}{2} \right) \end{aligned}$$

Puisque n est impair, $n - 1$ est pair, si bien que $\frac{n-1}{2}$ est entier.

Par suite, $a + \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que la somme des n nombres consécutifs est bien un multiple de n .

Le résultat n'est plus valable si n est pair.

Par exemple, la somme des 2 nombres consécutifs 3 et 4 n'est pas un multiple de 2.