1.6 1) $84 = 1 \cdot 84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12$

Par conséquent, les diviseurs positifs de 84 sont :
$1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84$.

2) On souhaite que $n^2 - 84$ soit le carré parfait d'un entier naturel a, c'est-à-dire $n^2 - 84 = a^2$.

Cette équation équivaut à $n^2 - a^2 = (n - a)\,(n + a) = 84\,$.

Attendu que $n \in \mathbb{N}$ et que $a \in \mathbb{N}$, il en résulte que $n - a$ et $n + a$ sont eux aussi des entiers naturels avec $n - a < n + a$.

Au vu de la question 1), cela nous laisse avec les 6 possibilités suivantes :

$(1) \begin{cases} n - a = 1 \\ n + a = 84 \end{cases}$ $(2) \begin{cases} n - a = 2 \\ n + a = 42 \end{cases}$ $(3) \begin{cases} n - a = 3 \\ n + a = 28 \end{cases}$

$(4) \begin{cases} n - a = 4 \\ n + a = 21 \end{cases}$ $(5) \begin{cases} n - a = 6 \\ n + a = 14 \end{cases}$ $(6) \begin{cases} n - a = 7 \\ n + a = 12 \end{cases}$

Pour que $n \in \mathbb{N}$, il faut que $2\,n$ soit pair : cette raison suffit pour écarter les systèmes d'équations (1), (3), (4) et (6).

Le système (2) fournit $n = 22$ et $a = 20\,$.
On vérifie que $n^2 - 84 = 22^2 - 84 = 484 - 84 = 400 = 20^2 = a^2\,$.

Le système (5) délivre $n = 10$ et $a = 4\,$.
On constate que $n^2 - 84 = 10^2 - 84 = 100 - 84 = 16 = 4^2 = a^2\,$.