1.8 1) La division polynomiale

$$\begin{array}{rr|l} n\,+ & 8 & 2\,n-5 \\ \cline{3-3} -n\,+ & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \cline{1-2} & \frac{21}{2} & \end{array}$$

fournit $\dfrac{n+8}{2\,n-5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{21}{2\,(2\,n-5)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{21}{2\,n-5}\right)$

Cette fraction est ainsi entière si

(a) $2\,n-5$ est un diviseur de 21

(b) $1 + \dfrac{21}{2\,n-5}$ est pair, c'est-à-dire $\dfrac{21}{2\,n-5}$ est impair

Ces deux conditions sont satisfaites si

$$\begin{cases} 2\,n-5 = -21 \\ 2\,n-5 = -7 \\ 2\,n-5 = -3 \\ 2\,n-5 = -1 \\ 2\,n-5 = 1 \\ 2\,n-5 = 3 \\ 2\,n-5 = 7 \\ 2\,n-5 = 21 \end{cases} \iff \begin{cases} n = -8 \\ n = -1 \\ n = 1 \\ n = 2 \\ n = 3 \\ n = 4 \\ n = 6 \\ n = 13 \end{cases}$$

2) Soit c un diviseur commun de $n+8$ et de $2\,n-5$.

La propriété 6) de l'exercice 1.1 certifie que c est aussi un diviseur de $2\,(n+8)-(2\,n-5)=21$.

Pour que la fraction soit effectivement réduite, il faut en outre que $c \neq \pm 1$.

Les valeurs possibles pour c sont donc $\pm 3, \pm 7, \pm 21$.